

ГНУЧКІ ПЛАСТИНИ НА СТОЯКАХ ІЗ ВІЛЬНИМ СПИРАННЯМ НА ДВІ ПРОМІЖНІ СТОРОНИ

Кожушко В. П., Краснов С. М., Бугаєвський С. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. Запропоновано метод розрахунку гнучких пластин, що як опору використовують ряд стояків, у яких дві протилежні сторони вільно спираються на опори. Продемонстровано застосування розробленого одним з авторів універсального методу розрахунку пластин з будь-якими зовнішніми навантаженнями для визначення напружено-деформованого стану пластини. Напружено-деформований стан пластини спрощується після побудови ліній впливу сил, що передаються поперечною смугою на поздовжні смуги, на які рекомендовано розбивати пластину. Складне питання теорії пружності зводиться до розв'язання задачі змішаним методом будівельної механіки.

Ключові слова: поздовжня смуга, поперечна смуга, змішаний метод будівельної механіки, система рівняння, фіктивне затиснення.

Вступ

Плити за описаними в статті умовами спираються часто застосовують у будівництві різних об'єктів. Розроблено різні математичні підходи для визначення напружено-деформованого стану гнучких пластин, що перебувають під дією різних зовнішніх навантажень. Це пов'язано не тільки з умовами спираються пластини на опори й стояки, але й з видом прикладених до плити зовнішніх навантажень. Задача значно ускладнюється в разі навантаження пластини зосередженими силами або зосередженими моментами, оскільки за будь-яких початкових умов спираються пластин необхідно розв'язувати диференціальне рівняння четвертого порядку. Зауважимо, що робіт, присвячених визначенню напружено-деформованого стану пластин на стояках, відносно небагато.

Аналіз публікацій

У студіях [1–11] детально проаналізовано різні підходи до розрахунку пластин з різними умовами їх спираються. Аналіз зарубіжних джерел [1–9] продемонстрував, що в розв'язанні інтегро-диференціальних рівнянь застосовуються різні математичні підходи (варіаційні методи, інтегральні рівняння Фредгольма, ряди й інтеграли Фур'є, подвійні тригонометричні ряди, матриці, конформні відтворення, метод колокацій, сіток тощо). Як наслідок, отримано громіздкі рішення, зокрема для окремих умов спираються пластин і в ситуаціях дії на пластини окремих видів зовнішнього навантаження. Єдиний підхід у визначенні напружено-деформованого стану гнучких пластин відсутній. Програмні комплекси, ос-

новані на впровадженні методу скінченних елементів, дають змогу брати до уваги умови спираються сторін гнучких пластин на опори й на стояки. Але недостатньо досліджень, присвячених виявленню кількості й форми скінченних елементів у розрахунку пластин з умовами спираються, поданими в цій статті.

Отже, задача виявлення напружено-деформованого стану пластин, що розглядається в статті, потребує подальших досліджень.

Мета статті

Продемонстровано можливість застосування запропонованого в роботах [10, 11] методу розрахунку напружено-деформованого стану пластин із певними умовами спираються.

Основи розрахунку пластини

Поставлена задача побудови ліній впливу сил Z_i , які передаються поперечною смугою на поздовжні смуги. Це дасть змогу визначати внутрішні сили (згинальні моменти, поперечні сили), що виникають у поздовжніх смугах від дії будь-яких зовнішніх навантажень. Після визначення ординат ліній впливу сил Z_i будуються лінії впливу згинальних моментів і поперечних сил у поперечній смузі. Згинальні моменти в поперечній смузі будуть крутними моментами для поздовжніх смуг. Отже, першою задачею запропонованого методу розрахунку є розбивка пластини на поздовжні й поперечні смуги. Поздовжні смуги (див. рис. 1) мають довжину l ; необхідно, щоб вони розташовувалися таким чином, щоб стояки розміщувалися на поздовжній осі смуги. Інші поздовжні смуги розташовуватимуться між стояками.

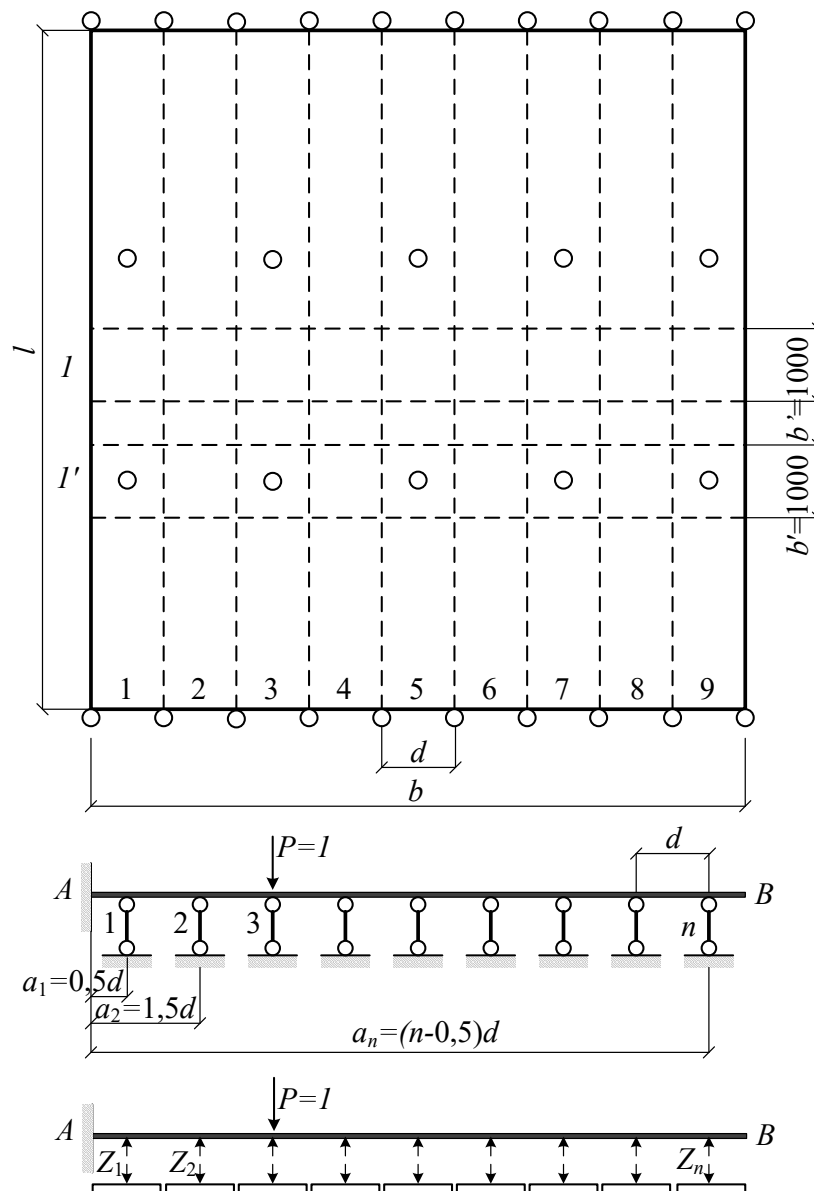


Рис. 1. Розрахункова й основна схеми поперечної смуги

Кількість поздовжніх смуг залежить від кількості стояків у поперечному напрямку пластини; бажано, щоб кількість дорівнювала 7–8 і більше. На рис. 1 пластина розбита на дев'ять поздовжніх смуг однакової ширини d .

Поперечні смуги завширшки $b'=1$ м вирізаються вздовж пластини l в тому місці, у якому передбачається визначити внутрішні сили.

На рис. 1 подано два варіанти розташування поперечних смуг: у середині прогону l (смуга 1) і над стояками (смуга 1').

Поперечний елемент розглядається як смуга на пружно-осідаючих опорах, якими є поздовжні смуги. Для визначення сил Z_i , що передаються поперечною смугою на поздов-

жні смуги, застосовано змішаний метод будівельної механіки. Для цього введено фіктивне затиснення поперечної смуги на її лівому кінці (у точці A).

У першому наближенні будуть узяті до уваги тільки вертикальні сили Z_i , які здебільшого впливають на розподільчу здатність пластини. Визначення впливу інших сил (скажімо, крутних моментів) не викликає принципових труднощів, як це продемонстровано в роботі [10].

Для визначення сил Z_i за певного положення одиничної сили $P = 1$, які фактично й будуть ординатами ліній впливу сил у i -й поздовжній смузі, необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\delta'_{ik} = \frac{d^3(1 - v_{\text{поп}}^2)}{6E_{\text{поп}} I_{\text{поп}} \cdot y_1} w_{ik}. \quad (8)$$

Позначимо

$$\alpha = \frac{d^3(1 - v_{\text{поп}}^2)}{6E_{\text{поп}} I_{\text{поп}} \cdot y_1} w_{ik}. \quad (9)$$

Показник α назовемо показником гнучкості системи, тоді

$$\delta'_{ik} = \alpha \cdot w_{ik}, \quad (10)$$

а збільшені вільні члени

$$\Delta'_{ip} = \alpha \cdot w_{ip}. \quad (11)$$

Збільшені основні переміщення необхідно визначати за такими формулами:
для поздовжніх смуг 2, 4, 6 і 8

$$\delta'_{ik} = 1 + \alpha \cdot w_{ii}; \quad (12)$$

для поздовжніх смуг 1, 3, 5, 7 і 9

$$\delta'_{ik} = \beta + \alpha \cdot w_{ii}, \quad (13)$$

де

$$\beta = \frac{y_2}{y_1}. \quad (14)$$

У формулі (14) y_2 – прогин поздовжньої смуги, яка розглядається як трипрогонна смуга.

Після множення на $\frac{1}{y_1}$ перших n рівнянь системи (1) зміняться коефіцієнти за умови ϕ_0 і y_0 .

Збільшені кути повороту ϕ'_0 й прогин y'_0 матимуть такий вигляд:

$$\phi'_0 = \frac{d}{y_1} \phi_0; \quad (14)$$

$$y'_0 = \frac{d}{y_1} y_0. \quad (15)$$

Тоді коефіцієнти за умови y'_0 дорівнюватимуть одиниці, а якщо ϕ'_0 – відносним відстаням, тобто 0,5; 1,5...($n-0,5$).

Якщо поперечна смуга буде вирізана над стояками (на рис. 1 це смуга 1'), то для побудови ліній впливу сил Z_i необхідно використовувати метод важеля.

Останнє рівняння системи (1) можна спростити, розділивши його на величину d . Тоді коефіцієнти за умови Z_i дорівнюватимуть 0,5; 1,5...($n-0,5$), а в разі вільного члена – $\frac{a_i}{d}$.

Щоб побудувати лінії впливу для всіх n поздовжніх смуг, необхідно систему (1) розв'язати n разів. У цьому разі змінюватимуться тільки вільні члени Δ'_{ip} .

Після завантаження ліній впливу i -ї поздовжньої смуги зовнішніми навантаженнями за методикою, викладеною в роботі [10], визначається коефіцієнт бічного розподілу (КПР). КПР показує, яку частину від зовнішнього навантаження сприймає i -та поздовжня смуга.

Після цього поздовжня смуга розраховується як проста балка. У нашому випадку смуги 1, 3, 5, 7 і 9 розраховуються як трипрогонні балки, а смуги 2, 4, 6 і 8 – як однопрогонні.

Маючи ординати ліній впливу сил Z_i на поздовжні смуги в якомусь перерізі вздовж довжини пластини, можна побудувати лінії впливу згинальних моментів і поперечних сил у поперечній смузі в цьому самому перерізі.

Якщо змінити перерізи вздовж поздовжньої смуги, можна побудувати лінії впливу згинальних моментів і поперечних сил для всієї пластини. За умови розташування одиначної сили $P = 1$ зліва від перерізу k (рис. 2) ординати ліній впливу згинальних моментів і поперечних сил визначають за такимим формулами:

$$M_k = -(y - y_k) + \sum_{\text{лів}} Z_i (0,5d - y_k); \quad (17)$$

$$Q_i = -1 + \sum_{\text{лів}} Z_i. \quad (18)$$

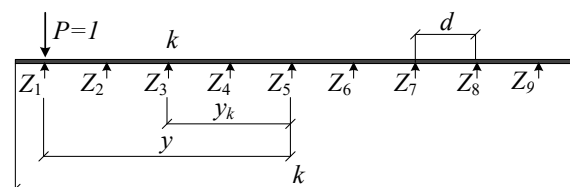


Рис. 2. Відстані від поздовжніх смуг до поздовжньої осі пластини

У разі розташування $P = 1$ праворуч від перерізу

$$M_k = \sum_{\text{лів}} Z_i (0,5d - y_k); \quad (19)$$

$$Q_k = \sum_{\text{лів}} Z_i, \quad (20)$$

де Z_i – ординати ліній впливу зусиль на поздовжній смугі за певного положення одиначної сили $P = 1$;

y – координати точки прикладення одиначного розподіленого навантаження $P = 1$ від поздовжньої осі симетрії пластини;

y_k – координати перерізу поперечної смуги від поздовжньої осі симетрії пластини, для якого будуються лінії впливу одиначних моментів і поперечних сил;

d – відстань між сусідніми поздовжніми смугами (ширина поздовжньої смуги).

У формулах (17–20) видно, що в побудові ліній впливу згинальних моментів і поперечних сил беруть участь тільки ті сили на поздовжній смугі, які розташовані зліва від перерізу k .

Висновок

Запропонований метод розрахунку дає змогу визначати напружено-деформований стан пластин за будь-якої схеми їх спираючі на стояки та дії на пластини будь-яких зовнішніх навантажень.

Література

- Варіаційні методи в математичній фізиці і техніці. <http://libarch.nmu.org.ua/handle/GenofondUA/66803>
- Tabor Z. A Novel Method of Estimating Structure Model Index from Gray-level Images. Med. Eng. Phys. 2011, vol. 33, № 2, 218–225 p.
- Hildebrand T., Ruegsegge R. A New Method for “the Model-Independent Assessment of Thickness in Tridimensional Images. Microesc, 1997, vol.185, № 1, 67–75 p.
- Редді Дж. Теорія і аналіз пружних пластин і оболонок. CRC PRESS «Тейлор і Френсіс».
- Evaluation of the Plate-rod Model Assumption of Trabecular Bone Rodrigo Moreno, Magnus Borga and Örjan Smedby Linköping University Post Print. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:542786/FULLTEXT02.pdf>
- On the calculation of rectangular plates by the trigonometric series. <https://pdfs.semanticscholar.org/2333/>
- Bending of thin plates. <https://booksite.elsevier.com/9780081009147/content/Figure%20Files/PDF/Chapter07.pdf>
- Вступ до теорії згину пластини. Ніраджан Паудель. <https://pcampus.academia.edu/NirajanPaudel>.
- Modeling of Thin-walled Shells and Plates. Introduction to the Theory of Shell Finite Element Models Szerző: Dr. András Székrenyes, BME. www.tankonyvtar.hu
- Кожушко В. П. Моделювання прольотних будов мостів: монографія. Харків: ХНАДУ, 2010. 196 с.
- Кожушко В. П., Краснов С. М., Бережна К. В. Гнучкі затиснені пластини з стояком, установленим під її серединою. Науковий вісник будівництва. 2019. Том 98, № 4. С. 314–317.

References

- Variatsiini metody v matematychnii fizytsi i tekhnitsi. <http://libarch.nmu.org.ua/handle/GenofondUA/66803>
- Tabor Z. A Novel Method of Estimating Structure Model Index from Gray-level Images. Med. Eng. Phys. 2011, vol. 33, № 2, 218–225 p.
- Hildebrand T., Ruegsegge R. A New Method for “the Model-Independent Assessment of Thickness in Tridimensional Images. Microesc, 1997, vol.185, № 1, 67–75 p.
- Reddi Dzh. Teoriya i analiz pruzhnykh plastin i obolonok. CRC PRESS “Tejlor i Frensis”.
- Evaluation of the Plate-rod Model Assumption of Trabecular Bone Rodrigo Moreno, Magnus Borga and Örjan Smedby Linköping University Post Print. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:542786/FULLTEXT02.pdf>
- On the calculation of rectangular plates by the trigonometric series. <https://pdfs.semanticscholar.org/2333/>
- Bending of thin plates. <https://booksite.elsevier.com/9780081009147/content/Figure%20Files/PDF/Chapter07.pdf>
- Vstup do teorii zghynu plastyny. Niradzhana Paudel. <https://pcampus.academia.edu/NirajanPaudel>.
- Modeling of Thin-walled Shells and Plates. Introduction to the Theory of Shell Finite Element Models Szerző: Dr. András Székrenyes, BME. www.tankonyvtar.hu
- Kozhushko V. P. Modelyuvannya prolotnykh budov mostiv. Monografiya. Kharkiv: HNADU, 2010. 196 s.
- Kozhushko V. P., Krasnov S. M., Berezhna K. V. Gnuchki zatisneni plastini z stoyakom, ustanovlenim pid yiyi seredinoyu. Naukovij visnik budivnictva. 2019. Tom 98, № 4. S. 314–317.

Кожушко Віталій Петрович, д-р техн. наук, проф. кафедри мостів, конструкцій і будівельної механіки ім. В.О. Російського, kozhuskovp@ukr.net, тел. +38057-707-37-22;

Краснов Сергій Миколайович, канд. техн. наук, доц. кафедри мостів, конструкцій і будівельної механіки ім. В.О. Російського;

Бугаєвський Сергій Олександрович, д-р техн. наук, проф. кафедри мостів, конструкцій і будівельної механіки ім. В.О. Російського, bugaevskiysa@gmail.com, тел. +38057-707-37-22.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, Харків, 61002, Україна.

Flexible plates on columns and free supports of two intermediate sides

Abstract. Problem. Nowadays, slabs with the resistance conditions specified in the article are often used in the construction of various construction objects. Various approaches have been developed from a mathematical point of view to determine the stress-strain state of flexible plates loaded with various external loads. This is due not only to the conditions of the plate's support on the supports and risers, but also to the type of external loads applied to the plate. The problem becomes significantly more complicated when the plate is loaded with concentrated forces or concentrated moments, because under any initial conditions of plate resistance, a fourth-order differential equation must be solved. There are relatively few works devoted to determining the stress-strain state of plates on risers. There is actually no single approach to determining the stress-strain state of flexible plates. Software complexes based on the application of the finite element method make it possible to take into account the conditions of support of the sides of flexible plates on supports and risers, but little research has been done aimed at identifying the number and shape of finite elements when calculating plates. **Purpose.** The purpose is to show the possibility of applying the developed calculation method to determine the stress-strain state of plates with the resistance conditions specified in the article. **Methodology.** The methodology of the developed calculation method is to construct the lines of influence of forces Z_i , which are transmitted by the transverse strip to the longitudinal strips. This will allow you to simply determine the internal forces (bending moments, transverse forces) arising in the longitudinal strips from the action of any external loads. After determining the ordinates of the influence lines of the forces Z_i , the influence lines of bending moments and transverse forces in the transverse strip are constructed. The bending moments in the transverse strip will be the torques for the longitudinal strips. The longitudinal strips should be arranged so that the

risers are on the longitudinal axis of the strip. Other longitudinal strips will be located between the risers. The number of longitudinal strips depends on the number of risers in the transverse direction of the plate. Transverse strips with a width of $b'=1$ m are cut at the point along the plate length l where the internal forces are to be determined. The transverse element is considered as a strip on elastic-sedimenting supports, which are longitudinal strips. To construct the lines of influence of the force Z_i acting on a certain longitudinal strip, it is necessary to apply a unit force $P=1$ over this strip. **Results.** Having the ordinates of the lines of influence of the force Z_i on the longitudinal strips in some cross-section along the length of the plate, it is possible to construct the lines of influence of bending moments and transverse forces in the transverse strip in the same section. By changing the cross-sections along the length of the longitudinal strip, lines of influence of bending moments and transverse forces are constructed for the entire plate. **Originality.** The proposed calculation method allows determining the stress-strain state of the plates for any scheme of their support on the risers and the action of any external loads on the plates. **Practical value.** The proposed calculation method allows determining the stress-strain state of bridge span structures and floor systems of industrial and civil buildings when any external loads act on the elements.

Keywords: longitudinal strip, transverse strip, mixed method of structural mechanics, system of equations, fictitious clamping.

Kozhushko Vitaly, professor, Doct. of Science, Bridge, Structures, and Structural Mechanics Department,

kozhuskvp@ukr.net,
tel. +38057-707-37-22;

Krasnov Sergey, Ph.D., Associate Professor, Bridge, Structures, and Structural Mechanics Department,
krasnov0256@gmail.com,
tel. +38057-707-37-22;

Bugayevsky Sergey, professor, Doct. of Science, Bridge, Structures, and Structural Mechanics Department,
bugaevskiysa@gmail.com,
тел. +38057-707-37-22.

Kharkiv National Automobile and Highway University, 61002, Ukrain, Kharkiv, Yaroslava Mudrogo st., 25.