

АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ПРИВОДІВ ГУСЕНИЧНИХ ПІДЙОМНО-ТРАНСПОРТНИХ МАШИН З ЕЛАСТИЧНІСТЮ, ТЕРТЯМ І ГІСТЕРЕЗИСОМ

Задорожний А. О.¹, Стаховський О. В.², Човнюк Ю. В.³,
Бугаєвський С. О.⁴, Мазуренко В. І.⁵

¹ Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»

² Національний університет оборони України

³ Київський національний університет будівництва і архітектури

⁴ Харківський національний автомобільно-дорожній університет

⁵ Інститут державного управління та наукових досліджень з цивільного захисту

Анотація. Для управління приводами з еластичністю й тертям, які широко використовуються в гусеничних підйомно-транспортних машинах (на гусеничній ході), повсюдно застосовується мехатроніка. У цьому разі аналіз нелінійної динаміки приводів, у складі яких є елементи еластичності, тертя (здебільшого сухого) та гістерезису, потребує поглибленого розуміння процесів, що в них відбуваються. У роботі запропоновано найпростішу модель динаміки зазначених приводів з нелінійним тертям, еластичністю та гістерезисом, які поєднані зі структурним демпфуванням. Саме останнє викликає появу гістерезисного зворотного зусилля (моменту), що разом із тертям призводить до коливної системи другого порядку з ефектом пам'яті. Отримана модель може бути використана також у прецизійних приводах опорно-поворотних пристроїв підйомно-транспортних машин і механізмів, а також у промисловій робототехніці. **Ключові слова:** мехатронні системи управління; підйомно-транспортні машини; гусеничні машини; аналіз; нелінійна динаміка; привод; еластичність; тертя; гістерезис.

Вступ

Невід'ємною частиною розроблення мехатронних систем управління сучасними гусеничними підйомно-транспортними машинами й промисловою робототехнікою є точне моделювання динамічних процесів, які в них відбуваються. Серед них особливий інтерес викликають складні нелінійні ефекти, що виявляються в приводах з еластичними елементами й тертям. Оскільки подібна нелінійна динаміка спостерігається в багатьох фізичних системах, актуальним завданням є дослідження відповідних нелінійних систем та їх моделювання. Розв'язку цієї проблеми було присвячено чимало наукових праць.

Аналіз публікацій

Для управління приводами з еластичністю і тертям потрібно поглиблене розуміння притаманної їм нелінійної динаміки. Під час розгляду моделі динаміки приводу з нелінійним тертям і еластичністю зазвичай вводять структурне демпфування. Останнє викликає появу гістерезисного зворотного зусилля (моменту), яке разом з тертям призводить до коливної системи другого порядку з ефектом

пам'яті. Серед робіт, присвячених таким моделям привода, можна згадати [1, 2] або відносно недавні праці [3, 4].

Особливо тісно дослідження складних процесів у приводах пов'язане з розробленням суглобів промислових роботів, наприклад, у студіях [5, 6–9], присвячених управлінню гнучкими робототехнічними з'єднаннями. У розв'язанні завдань управління, забезпечення робастності та простоти параметризації більшість цих підходів оперує паралельним та/або послідовним з'єднанням лінійних пружин і демпфуючих елементів. У цьому разі структура моделі залежить від конкретної конфігурації аналізованого вузла (суглоба). Більш докладне моделювання складних динамічних процесів у приводах пов'язано з дослідженням хвильових редукторів і притаманних їм ефектів еластичності. Серед робіт у цій галузі можна виокремити [10–12]. Для опису ефектів тертя є кілька динамічних моделей, якими можна скористатися для розв'язання завдань управління, а саме модель Даля (Dahl), ЛуГре (LuGre), Лувена (Leuven), GMS (Generalized Maxwell-Slip – узагальнена модель ковзання Максвелл-

ла). Модель GMS є найточнішою з-поміж згаданих вище, вона описує найважливіші властивості кінетичного тертя [13] (у [13] можна знайти й докладний огляд таких моделей). Водночас ідентифікація розгалужених параметрів такої моделі є зовсім нетривіальним завданням, як було подано в роботах [14, 15]. У праці [16] автори також наголошують на складнощах, притаманних завданню ідентифікації параметрів моделі тертя, наприклад, вказують на неточність вимірювання тертя та якості доступних даних. Пошук компромісу між достатньою складністю моделі, яка дасть змогу описати всі ефекти тертя, що спостерігаються, і легкістю її параметризації залишається відкритим питанням, яке потребує додаткових досліджень. В описі нелінійностей, викликаних еластичністю в приводах і редукторах, найчастіше використовують нелінійні характеристичні криві нежорсткості, що дає змогу описати фази релаксації та збільшення жорсткості в широкому діапазоні робочих режимів виробів. Наприклад, у праці [17] розглядувані нелінійності в трансмісії подані деформуванням, спряженим із гістерезисом тертя. У роботі [18] запропоновано підхід до моделювання нелінійних ефектів у суглобах (промислових) роботів, що базується на декомпозиції ефектів гістерезису, тертя й люфту. Компенсація тертя з використанням спостерігача на основі моделі ЛуГре описана, наприклад, у праці [19]. У студіях [20, 21] проаналізовано, як гістерезисний оператор може бути застосований у моделюванні ефектів тертя.

Запропонована робота основана на результатах, уперше поданих у статті [22].

Мета й постановка завдання

Мета роботи полягає в розробленні та обґрунтуванні нелінійної моделі тертя зниженої складності, що дає змогу описати динаміку привода гусеничних підйомно-транспортних машин / роботів з механізованими системами управління, у яких поряд із тертям і еластичністю наявний ще й гістерезис.

Виклад основного матеріалу

1. Осцилятор другого порядку

Проста лінійна коливна система другого порядку з одним ступенем свободи обертання q подається рівнянням

$$I \ddot{q} + D \dot{q} + Kq = 0. \quad (1)$$

У цій формулі лінійні коефіцієнти I , D , K відповідають інерції, демпфуванню та жорсткості відповідно.

У процесі збурення системи в правій частині рівняння (1) замість нуля з'являється відповідний вхідний вплив. Для цієї системи власна частота ω і коефіцієнт загасання θ є постійними величинами й можуть бути визначені так:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I} - \left(\frac{D}{2I}\right)^2}, \quad \theta = \frac{D}{2I}. \quad (2)$$

У цьому разі траєкторія руху описується рівнянням

$$q(t) = q_0 \cdot \exp(-\theta t) \cdot \sin(\omega t + \phi_0), \quad (3)$$

де q_0 , ϕ_0 – початкова амплітуда й початкова фаза коливань відповідно; t – час. Після завершення зовнішнього впливу (або за нульових початкових умов незбуреної системи) така система збігається до нульового положення рівноваги за будь-яких коефіцієнтів з єдиним обмеженням $\theta > 0$.

Майже всі фізичні системи тією чи іншою мірою мають нелінійність. У разі, коли ці нелінійності стають значущими, замість рівняння вільних коливань (1) можна записати нелінійне рівняння

$$I \ddot{q} + D \dot{q} + Kq = \dots \quad (4)$$

у якому демпфування й жорсткість системи подають нелінійними функціями стану $\xi(\dots)$ та $\zeta(\dots)$. У цьому разі частота власних коливань і коефіцієнт загасання вже не є постійними величинами, і траєкторія руху системи не може бути записана виразом (3). Навіть якщо припустити, що поряд із робочою точкою системи власна частота близька до константи, то під впливом нелінійного демпфування, яке залежить від поточного стану, траєкторії можуть збігатися до ненульового стану рівноваги.

Цей ефект легко проілюструвати в процесі використання фазової траєкторії системи. На рис. 1 зображені фазові траєкторії вільних коливань системи другого порядку для лінійного (а) і нелінійного (б) випадків. Обидві траєкторії починаються за одних і тих самих початкових умов під час збурення системи імпульсною функцією.

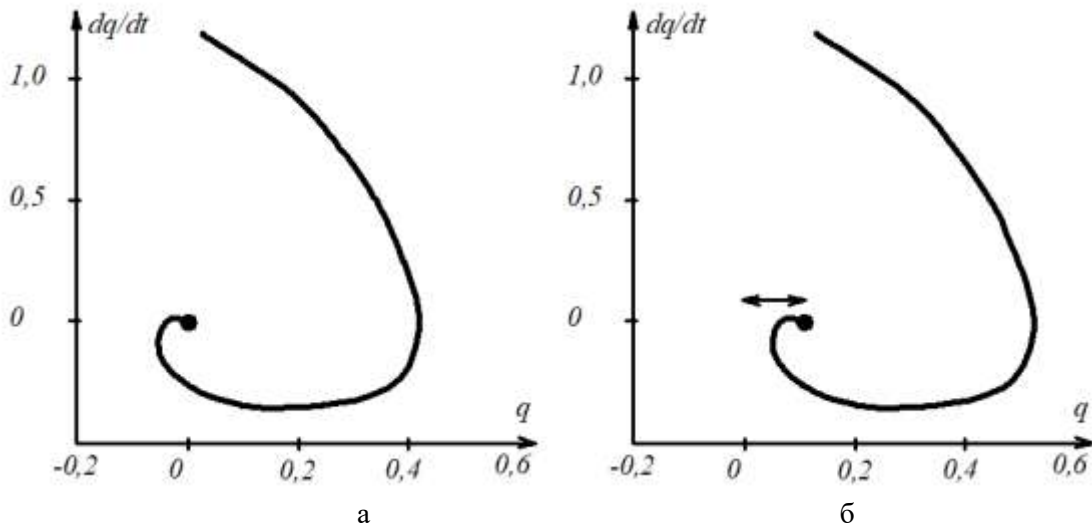


Рис. 1. Фазова траєкторія лінійної (а) і нелінійної (б) системи.
Вільні коливання

У наведеному прикладі жорсткість нелінійної системи залежить від положення системи, подібно до процесу збільшення жорсткості, а демпфування (внаслідок нелінійного тертя) залежить від швидкості. Незважаючи на те, що обидві траєкторії виглядають подібними одна на одну, легко помітити, що нелінійна система збігається до ненульового стану рівноваги, тобто наявна нелінійність тертя визначає поведінку «системи з пам'яттю».

2. Нелінійна динамічна модель

На рис. 2 подано схему запропонованої нелінійної динамічної моделі привода з одним обертальним ступенем вільності руху. Узагальнена маса (яка відповідає інертності I) перебуває під зовнішнім вхідним впливом u , пропорційним прикладеному моменту. Обертанню заважає лінійне в'язке тертя, нелінійне тертя, що є повзуном, і пружина з гістерезисом.

Наявність останньої призводить до гістерезисної поведінки зворотного моменту i , як наслідок, до структурного демпфування. Залежно від механічної структури виробу протидіючі ефекти можуть бути пов'язані зі з'єднаннями та/або конструктивними елементами, з'єднаними з нерухомою основою або з наступною рухомою частиною виробу.

У цьому разі за умови використання нелінійної динамічної системи другого порядку можна описати привод таким чином:

$$I \ddot{q} + \dots = 0, \quad (5)$$

де q – вихідна величина, кутове переміщення;

D – коефіцієнт лінійного в'язкого тертя;

$F(\dots)$ – нелінійне тертя;

$\zeta(\dots)$ – загальний зворотний момент.

Символ G позначає узагальнений вхідний коефіцієнт підсилення; x та z – внутрішній стан гістерезису пружини та внутрішній стан моделі тертя в процесі мікропереміщень (в англійській літературі широко використовується термін *pre-sliding* – «тертя передковзання»).

Застосована модель ЛуГре, вперше запропонована в роботі [23], дає змогу описати як етап тертя передковзання, так і етап власне ковзання.

Упродовж етапу передковзання величина тертя здебільшого визначається відносним зсувом тіл і силою зчеплення нерівностей контактних поверхонь. На етапі ковзання сила тертя найчастіше залежить від відносної швидкості руху. Загальний момент тертя надається виразом

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z}, \quad (6)$$

де σ_0 – коефіцієнт пружної жорсткості нерівностей контактних поверхонь;

σ_1 – коефіцієнт в'язкого тертя під час мікропереміщень.

Змінна стану z позначає усереднену деформацію нерівностей контактних поверхонь.

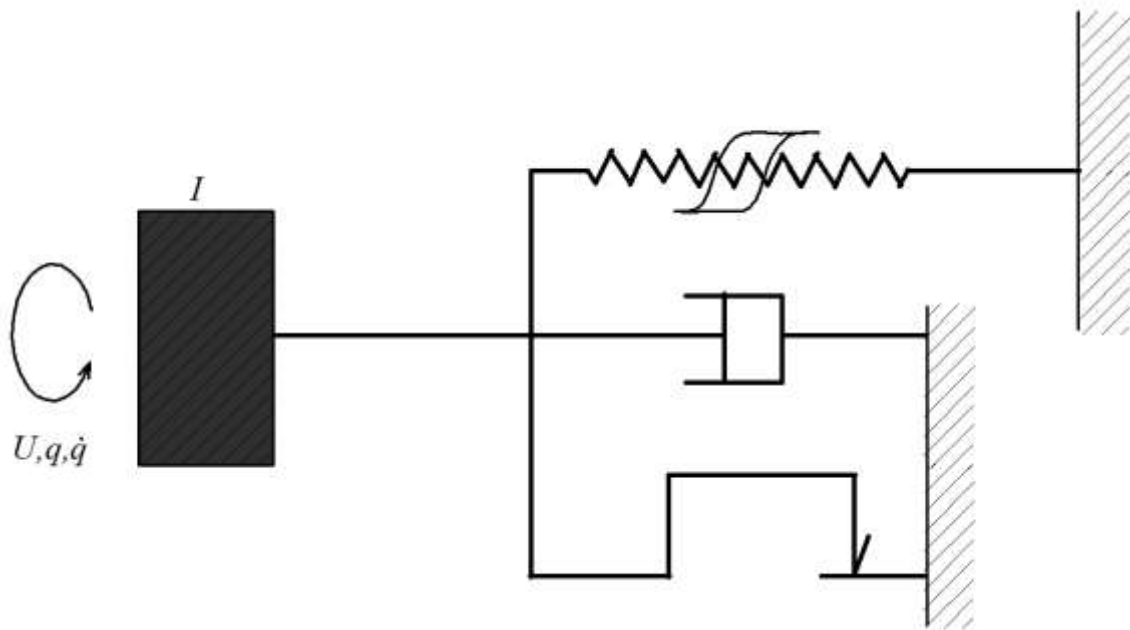


Рис. 2. Схема привода з нелінійним тертям і пружиною з гістерезисом

Для власної динаміки, яка описує ефект гістерезису тертя, можна записати, що

$$\tau = s(\dot{x}) \cdot x \quad (7)$$

де $s(\dot{x})$ показує залежну від швидкості статичну криву Штрібека [24]:

$$s(\dot{x}) = F_c + (F_s - F_c) \cdot \exp\left(-\left|\frac{\dot{x}}{V_s}\right|^\delta\right) \quad (8)$$

Крива Штрібека стаціонарного тертя обмежена статичним тертям F_s зверху та постійною тертя Кулона F_c знизу. Величина V_s позначає швидкість Штрібека, а δ – коефіцієнт форми Штрібека. Більш докладний опис моделі ЛуГре можна знайти в роботах [23, 25].

Загальний зворотний момент, що виникає в пружині з гістерезисом, може бути поділений на два складники – еластичний і пластичний (незворотний), кожний з яких має свій ваговий коефіцієнт:

$$\zeta(q, x) = \sum \alpha K_i q^i + (1 - \alpha) \cdot K_1 x. \quad (9)$$

Коефіцієнти полінома K_i описують нелінійну характеристичну криву жорсткості. Часто для опису пружини, у якої збільшується жорсткість, достатньо взяти $K_1, K_3 \neq 0$.

Ваговий коефіцієнт $0 < \alpha < 1$ зумовлює співвідношення між абсолютно еластичним ($\alpha = 1$) та повністю гістерезисним ($\alpha = 0$) зворотними моментами. Змінна стану x , що описує еластично-пластичну деформацію та відповідне структурне демпфування:

$$\dot{x} = \frac{1}{A} \left(\frac{B}{1 + B^n} \right) \cdot \zeta(q, x) \quad (10)$$

Залежність (10) описує собою класичну модель гістерезису Бук-Вена, запропоновану в роботі [26] і пізніше узагальнену в дослідженні [27]. Тут параметри A, B та n задають форму гістерезисної кривої. Напрямок і амплітуда гістерезисного циклу визначаються величиною A , тоді як величина B задає форму гістерезису. Згладжувальний коефіцієнт $n \geq 1$ визначає перехід між еластичним і пластичним складниками. Отже, для абсолютно еластичних структур n може бути обрано рівним одиниці. Більш докладно опис класу диференціальних моделей гістерезису та їх параметрів можна знайти в праці [28].

Отримана нелінійна модель привода містить $13 + i$ параметрів, три з яких належать до лінійної частини моделі, а інші відповідають досліджуваним нелінійностям. У цьому разі i позначає степінь полінома, що описує характеристичну криву жорсткості.

Моделювання реакції динамічної моделі проведено на ПЕОМ. Як збурювальна дія на модель подавались синусоїдальні сигнали рівної амплітуди та різної частоти: 0,5 Гц, 5 Гц й 50 Гц.

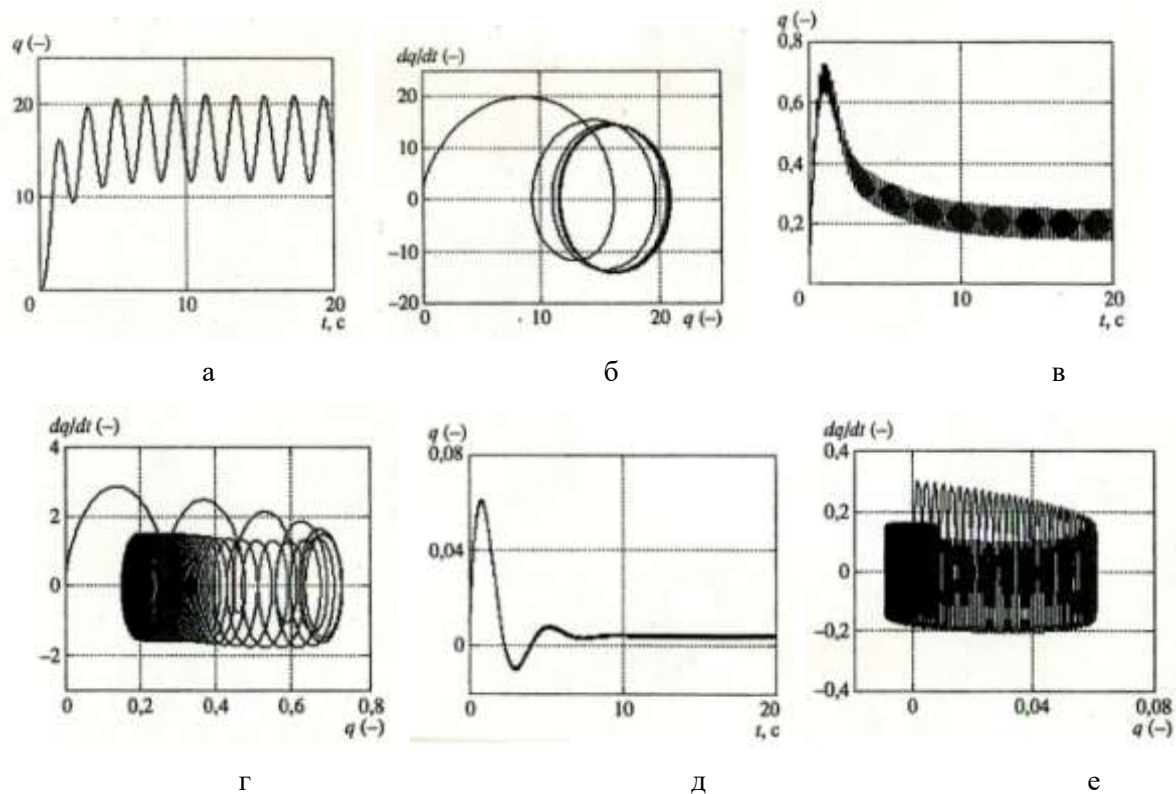


Рис. 3. Реакція системи на синусоїдальні збурення різної частоти:
а, б – 0,5 Гц; в, г – 5 Гц; д, е – 50 Гц; а, в, д – графіки вихідної змінної (кута обертання);
б, г, е – фазові траєкторії руху

У всіх трьох випадках система приходила до усталеного коливного режиму, як показано на рис. 3.

Однак перехідні процеси для різних частот суттєво різняться. Необхідно зауважити, що усталені стаціонарні коливання $q(t)$ відбуваються навколо різних ненульових точок рівноваги, (див. рис. 3, а, в, д), якщо $t > 10$ с. На рис. 3, б, г та е наведені фазові траєкторії системи.

Під час аналізу фазових траєкторій різниця в перехідних процесах стає очевидною, хоча поведінка системи залишається стабільною для всіх трьох випадків у досліджуваному діапазоні частот.

Усі три фазові траєкторії виходять на еліптичну орбіту навколо різних точок рівноваги.

Висновки

У роботі запропоновано просту модель (5)–(10), що дає змогу описати нелінійну динаміку привода гусеничних підйомно-транспортних машин з еластичністю і тертям, керованого мехатронною (високочастотною) системою.

Модель було отримано внаслідок аналізу динаміки осцилятора другого порядку, в якому нелінійності тертя та жорсткості викликають перехідні процеси з пам'яттю.

Для опису тертя в системі використано добре відому модель ЛуГре. Вона обрана здебільшого завдяки малому набору налаштовуваних параметрів порівняно з іншими моделями. Гістерезисний зворотний момент нелінійної пружини з еластично-пластичними властивостями був промодельований за допомогою нелінійного диференціального рівняння стану, подібного до спрощеної форми класичної моделі гістерезису Бук-Вена.

Застосовані вагові коефіцієнти дають змогу варіювати частку еластичного й пластичного складників у загальному зворотному моменті.

Отримана модель привода може бути використана для опису динаміки прецизійного опорно-поворотного пристрою. Для уточнення й більш адекватного опису характеристичної кривої жорсткості необхідно використати альтернативні моделі тертя, у яких відсутній ефект дрейфу (що спричиняє помилки у визначенні / передбаченні фазової траєкторії системи).

Серед сучасних моделей тертя можливим кандидатом може стати нещодавно запропонована модель з еластично-пластичними властивостями [30, 31].

Майбутні дослідження можуть бути присвячені розробленню методів ідентифікації параметрів моделі й використанню отриманої моделі в завданнях управління сучасними гусеничними підйомно-транспортними машинами за допомогою мехатронних систем і комплексів.

Література

1. Кіндрачук М. В., Лабунець В. Ф., Пашечко М. І., Корбут Є. В. Трибологія: підручник / МОН. Київ: НАУ-друк, 2009. 392 с.
2. Лудченко О. А. Технічна експлуатація і обслуговування автомобілів: Технологія: підручник. Київ: Вища школа, 2007. 527 с.
3. Диха О. В. До методики розрахунку режиму тертя у змащених циліндричних опорах ковзання. *Проблеми трибології*. 2010. № 4. С. 117–121.
4. Вельбой В. П. Аналіз умов навантаження та мащення підшипникових систем ковзання механізмів газорозподілу ДВЗ. *Проблеми трибології*. 2016. № 2. С. 97–103.
5. Spong M. Modelling and control of elastic joint robots. *J. Dynamic Syst., Measurement, Control*. 1987. Vol. 109, № 4. P. 310–319.
6. Ferretti G., Magnani G., Rocco P. Impedance control for elastic joints industrial manipulators. *IEEE Trans. Robot. Automat.* 2004. Vol. 20, № 3. P. 488–498.
7. Ott C., Albu-Schaeffer A., Kugi A., Hirzinger G. On the passivity-based impedance control of flexible joint robots. *IEEE Trans. Robot.* 2008. Vol. 24, № 2. P. 416–429.
8. Thummel M., Otter M., Balls J. Vibration control of elastic joint robots by inverse dynamics models. *Solid Mech. Appl.* 2005. № 130. P. 343–354.
9. Zollo L., Siciliano B., Luca A. D., Guglielmelli E. et al. Compliance control for an anthropomorphic robot with elastic joints: Theory and experiments. *J. Dynam. Syst., Measurement Control*. 2005. Vol. 127, № 3. P. 321–328.
10. Dhaonadi R., Ghorbel F. H., Gandhi P. S. A new dynamic model of hysteresis in harmonic drives. *IEEE Trans. Industrial Electron.* 2003. Vol. 50, № 6. P. 1165–1171.
11. Taghirad H., Belanger P. A nonlinear model for harmonic drive friction and compliance. *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.* (ICRA'97). 1997. P. 248–253.
12. Tjalijowidodo T., Al-Bender F., Brussel H. V. Modelling and identification of nonlinear torsional stiffness in harmonic drive. *Proc. 5th Eur. Nonlinear Dyn. Conf.* 2005. P. 1809–1816.
13. Al-Bender F., Swevers J. Characterization of friction force dynamics. *IEEE Control Syst. Mag.* 2008. Vol. 28, № 6. P. 64–81.
14. Worden K., Wong C. X., Parlitiz U., Hornstein A., et al. Identification of pre-sliding and sliding friction dynamics: Grey box and black-box models. *Mechan. Syst. Signal Proc.* 2007. Vol. 21, № 1. P. 514–534.
15. Rizos D., Fassois S. Friction identification based upon the LuGre and Maxwell slip models. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*. 2009. Vol. 17, № 1. P. 153–160.
16. Ruderman M., Hoffmann F., Krettek J., Braun J., et al. Robust identification of nonlinear frictional dynamics for advanced controller design. *Proc. IFAC 15th Sympos. Syst. Identificat.* (SYSID 2009). Saint-Malo, France, 2009. P. 474–479.
17. Seyffertl W., Maghzal A. J., Angeles J. Nonlinear modeling and parameter identification of harmonic drive robotic transmissions. *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.* 1995. P. 3027–3032.
18. Ruderman M., Hoffmann F., Bertram T. Modeling and identification of elastic robot joints with hysteresis and backlash. *IEEE Trans. Industrial Electron.* 2009. Vol. 56, № 10. P. 3840–3847.
19. Freidovich L., Robertsson A., Shiriaev A., Johansson R. LuGre-model-based friction compensation. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*. 2010. Vol. 18, № 1. P. 194–200.
20. Bliman P., Sorine M. Friction modeling by hysteresis operators: application to Dahl, striction and Stribeck effects. *Proc. Conf. "Models of Hysteresis"*. Trento, Italy, 1991. P. 10–19.
21. Bliman P., Sorine M. A system theoretic approach of systems with hysteresis. Application to friction modeling and compensation. *Proc. 2nd Eur. Control Conf. Groningen, Netherlands*. 1993. P. 1844–1849.
22. Ruderman M., Bertram T., Aranovskiy S. Nonlinear dynamic of actuators with elasticities and friction. *Proc. 5th IFAC Sympos. Mechatron. Syst.* Cambridge, USA, 2010. P. 255–260.
23. Canudas de Wit C., Olsson H., Åström K. J., Lishinsky P. A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1995. Vol. 40, № 3. P. 419–425.
24. Stribeck R. The basic properties of sliding and rolling bearings. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*. 1902. № 36. P. 1341–1348, 1432–1438, 1463–1470.
25. Åström K. J., Canudas de Wit C. Revisiting the LuGre friction model. *IEEE Control Syst. Mag.* 2008. Vol. 28, № 6. P. 101–114.
26. Bonc R. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. *Proc. 4th Conf. on Nonlinear Oscillations*. 1967. P. 315.
27. Wen Y. K. Method for random vibration of hysteretic systems. *ASCE J. Engin. Mech. Div.* 1976. Vol. 102, № 2. P. 249–263.
28. Ma F., Zhang H., Bockstedte A., Foliente G. C., et al. Parameter analysis of the differential model of hysteresis. *J. Appl. Mechan.* 2004. Vol. 71, № 3. P. 342–349.
29. Васильєв В. Н. Стан та перспективи розвитку прецизійних електроприводів комплексів ви-

сокоточних спостережень. *Вісник. ВНЗ. Приладобудування*. 2008. № 6. С. 5–11.

30. Ruderman M., Bertram T. Friction model with elasto-plasticity for advanced control applications. *Proc. IEEE/ASME Int. Conf. Advanced Intelligent Mechatron.* (AIM 2010). Montreal, Canada, 2010. P. 914–919.
31. Човнюк Ю. В., Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Уточнена динамічна модель руху візка з вантажем на гнучкому підвісі. *MOTROL*. 2011. Vol. 13B. P. 130–137.

References

1. Kindrachuk M. V., Labunets V. F., Pashechko M. I., Korbut E. V. Trybolohiya: pidruchnyk / MON [Tribology: textbook / MES]. Kyiv: NAU-printing, 2009. 392 p.
2. Ludchenko O. A. Tekhnichna ekspluatatsiya i obsluhovuvannya avtomobiliv: Tekhnolohiya: pidruchnyk [Technical operation and maintenance of automobiles: Technology: textbook]. Kyiv: Vyscha shkola, 2007. 527 p.
3. Dykha O.V. Do metodyky rozrakhunku rezhymu tertya u zماشchenykh tsylindrychnykh oporakh kovzannya [To the method of calculating the friction regime in lubricated cylindrical sliding bearings] / *Problems of Tribology*. 2010. No. 4. P. 117–121.
4. Velboy V. P. Analiz umov navantazhennya ta mashchennya pidshypnykovykh system kovzannya mekhanizmiv hazorozpodilu DVZ [Analysis of loading conditions and lubrication of sliding bearing systems of gas distribution mechanisms of internal combustion engines] / *Problems of tribology*. 2016. No. 2. P. 97–103.
5. Spong M. Modelling and control of elastic joint robots. *J. Dynamic Syst., Measurement, Control*. 1987. Vol. 109, № 4. P. 310–319.
6. Ferretti G., Magnani G., Rocco P. Impedance control for elastic joints industrial manipulators. *IEEE Trans. Robot. Automat.* 2004. Vol. 20, № 3. P. 488–498.
7. Ott C., Albu-Schaeffer A., Kugi A., Hirzinger G. On the passivity-based impedance control of flexible joint robots. *IEEE Trans. Robot.* 2008. Vol. 24, № 2. P. 416–429.
8. Thummel M., Otter M., Balls J. Vibration control of elastic joint robots by inverse dynamics models. *Solid Mech. Appl.* 2005. № 130. P. 343–354.
9. Zollo L., Siciliano B., Luca A. D., Guglielmelli E. et al. Compliance control for an anthropomorphic robot with elastic joints: Theory and experiments. *J. Dynam. Syst., Measurement Control*. 2005. Vol. 127, № 3. P. 321–328.
10. Dhaonadi R., Ghorbel F. H., Gandhi P. S. A new dynamic model of hysteresis in harmonic drives. *IEEE Trans. Industrial Electron.* 2003. Vol. 50, № 6. P. 1165–1171.
11. Taghirad H., Belanger P. A nonlinear model for harmonic drive friction and compliance. *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat. (ICRA'97)*. 1997. P. 248–253.
12. Tjalijowidodo T., Al-Bender F., Brussel H. V. Modelling and identification of nonlinear torsional stiffness in harmonic drive. *Proc. 5th Eur. Nonlinear Dyn. Conf.* 2005. P. 1809–1816.
13. Al-Bender F., Swevers J. Characterization of friction force dynamics. *IEEE Control Syst. Mag.* 2008. Vol. 28, № 6. P. 64–81.
14. Worden K., Wong C. X., Parlitz U., Hornstein A., et al. Identification of pre-sliding and sliding friction dynamics: Grey box and black-box models. *Mechan. Syst. Signal Proc.* 2007. Vol. 21, № 1. P. 514–534.
15. Rigos D., Fassois S. Friction identification based upon the LuGre and Maxwell slip models. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*. 2009. Vol. 17, № 1. P. 153–160.
16. Ruderman M., Hoffmann F., Krettek J., Braun J., et al. Robust identification of nonlinear frictional dynamics for advanced controller design. *Proc. IFAC 15th Sympos. Syst. Identificat. (SYSID 2009)*. Saint-Malo, France, 2009. P. 474–479.
17. Seyffertl W., Maghzal A. J., Angeles J. Nonlinear modeling and parameter identification of harmonic drive robotic transmissions. *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.* 1995. P. 3027–3032.
18. Ruderman M., Hoffmann F., Bertram T. Modeling and identification of elastic robot joints with hysteresis and backlash. *IEEE Trans. Industrial Electron.* 2009. Vol. 56, № 10. P. 3840–3847.
19. Freidovich L., Robertsson A., Shiriaev A., Johansson R. LuGre-model-based friction compensation. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*. 2010. Vol. 18, № 1. P. 194–200.
20. Bliman P., Sorine M. Friction modeling by hysteresis operators: application to Dahl, striction and Stribeck effects. *Proc. Conf. "Models of Hysteresis"*. Trento, Italy, 1991. P. 10–19.
21. Bliman P., Sorine M. A system theoretic approach of systems with hysteresis. Application to friction modeling and compensation. *Proc. 2nd Eur. Control Conf. Groningen, Netherlands*, 1993. P. 1844–1849.
22. Ruderman M., Bertram T., Aranovskiy S. Nonlinear dynamic of actuators with elasticities and friction. *Proc. 5th IFAC Sympos. Mechatron. Syst.* Cambridge, USA, 2010. P. 255–260.
23. Canudas de Wit C., Olsson H., Åström K. J., Lishinsky P. A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1995. Vol. 40, № 3. P. 419–425.
24. Stribeck R. The basic properties of sliding and rolling bearings. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*. 1902. № 36. P. 1341–1348, 1432–1438, 1463–1470.
25. Åström K. J., Canudas de Wit C. Revisiting the LuGre friction model. *IEEE Control Syst. Mag.* 2008. Vol. 28, № 6. P. 101–114.
26. Bonc R. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. *Proc. 4th Conf. on Nonlinear Oscillations*. 1967. P. 315.

27. Wen Y. K. Method for random vibration of hysteretic systems. ASCE J. Engin. Mech. Div. 1976. Vol. 102, № 2. P. 249–263.
28. Ma F., Zhang H., Bockstede A., Foliente G. C., et al. Parameter analysis of the differential model of hysteresis. J. Appl. Mechan. 2004. Vol. 71, № 3. P. 342–349.
29. Vasiliev V. N. Stan ta perspektyvy rozvytku pret-syzyynykh elektropryvodiv kompleksiv vysokoto-chnykh sposterezhen [Status and development prospects of precision electric drives for high-precision observation complexes]. News of Higher Education Institutions. Instrument-making. 2008. No. 6. P. 5–11
30. Ruderman M., Bertram T. Friction model with elasto-plasticity for advanced control applications. Proc. IEEE/ASME Int. Conf. Advanced Intelligent Mechatron. (AIM 2010). Montreal, Canada, 2010. P. 914–919.
31. Chovnyuk Yu. V., Loveikin V. S., Romasevich Yu. O. Utochnena dynamichna model' rukhu vizka z vantazhem na hnuchkomu pidvisi [Refined dynamic model of the movement of a trolley with a load on a flexible suspension]. MOTROL. 2011. Vol. 13B. P. 130–137.

Задорожний Андрій Олексійович¹, к. т. н., доцент кафедри бронетанкового озброєння та військової техніки, zsnj1971@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0002-1031-0585>, тел. +38 066 931 28 78;

Стаховський Олег Валерійович², д. т. н., професор кафедри військової підготовки, dr.stahman@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9808-6302>, тел. +38 050 254 75 28;

Човнюк Юрій Васильович³, к. т. н., доцент кафедри міського господарства, ychovnyuk@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0002-0608-0203>, тел. +38 096 570 45 65;

Бугаєвський Сергій Олександрович⁴, д. т. н., професор кафедри мостів, конструкцій і будівельної механіки, bugaevskiysa@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2861-0268>, тел. +38 050 937 90 16;

Мазуренко Валерій Іванович⁵, к. в. н., професор кафедри організації заходів цивільного захисту, mazurenko.valerii@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7111-8829>, тел. (044) 4282306.

¹ Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна

² Національний університет оборони України, м. Київ, Україна

³ Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна

⁴ Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків, Україна

⁵ Інститут державного управління та наукових досліджень з цивільного захисту, м. Київ, Україна

Analysis of nonlinear dynamics of drives of tracked lifting and transport machines with elasticities, friction, and hysteresis

Annotation. The paper proposes a model of the dynamics of the above drives with nonlinear friction, elasticity and hysteresis, combined with structural damping. **Problem.** An integral part of the development of mechatronic control systems for modern tracked lifting and transport machines and industrial robotics is the accurate modeling of the dynamic processes that occur in them. Among them, complex nonlinear effects that manifest themselves in drives with elastic elements and friction are of particular interest. Since similar nonlinear dynamics are observed in many physical systems, the current task is to study the corresponding nonlinear systems and their modeling. Many scientific works have been devoted to solving this problem. **Goal.** The aim of the work is to develop and substantiate a nonlinear friction model of reduced complexity, which allows us to describe the dynamics of the drive of tracked lifting and transporting machines/robots with mechanized control systems, in which, along with friction and elasticity, hysteresis is also present. **Methodology.** The work proposes a mathematical model that enables the description of the nonlinear dynamics of the drive of tracked lifting and transporting machines with elasticity and friction, which is controlled by a mechatronic (high-frequency) system. The model was obtained in the analysis of the dynamics of a second-order oscillator, in which the nonlinearities of friction and stiffness cause transient processes with memory. To describe the friction in the system, the well-known Lou Gre model was used. It was chosen, mainly, due to the small set of adjustable parameters in comparison with other models. The hysteresis feedback torque of a nonlinear spring with elastic-plastic properties was modeled using a nonlinear differential equation of state, similar to a simplified form of the classical Book-Ven hysteresis model. The applied weighting factors allow varying the proportion of elastic and plastic components in the total feedback torque. **Practical value.** The obtained drive model can be used to describe the dynamics of a precision rotary support device. To clarify and more adequately describe the characteristic stiffness curve, alternative friction models should be used that do not have the drift effect (which leads to errors in determining/predicting the phase trajectory of the system). Among modern friction models, a recently proposed model with elastic-plastic properties may be a possible candidate.

Key words: mechatronic control systems; lifting and conveying machines; tracked vehicles; analysis; nonlinear dynamics; drive; elasticity; friction; hysteresis.

Zadorozhnyi Andriy Oleksiyovych¹, Associate Professor, PhD, Associate Professor of the Department of Armored Weapons and Military Equipment,
zsnj1971@ukr.net,
<https://orcid.org/0000-0002-1031-0585>,
tel. +38 066 931 28 78;

Stakhovsky Oleg Valeriyovych², Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Military Training,
dr.stahman@gmail.com,
<https://orcid.org/0000-0002-9808-6302>,
tel. +38 050 254 75 28;

Chovnyuk Yuriy Vasyliovych³, Associate Professor, Ph.D, Associate Professor of the Department of Urban Economics,
yhovnyuk@ukr.net,
<https://orcid.org/0000-0002-0608-0203>,
tel. +38 096 570 45 65;

Buhaievskiy Sergiy Oleksandrovyh⁴, Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor Department of Bridges, Structures and Construction Mechanics,
bugaevskiysa@gmail.com,
<https://orcid.org/0000-0003-2861-0268>,
tel. +38 050 937 90 16;

Mazurenko Valerii Ivanovich⁵, Professor, Associate, Ph.D, Professor of the Department of Civil Defense Organization,
mazurenko.valerii@gmail.com,
<https://orcid.org/0000-0002-7111-8829>,
tel. (044) 4282306.

¹Military Institute of Tank Troops of the National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine

²National Defense University, Kyiv, Ukraine

³Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine

⁴Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine

⁵Institute of Public Administration and Scientific Research on Civil Protection, Kyiv, Ukraine
