

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕГОЛОНОМНІЙ МОДЕЛІ КУЛЬОВОГО МЛИНА

Шатохін В.М.¹, Красніков С.В.²

¹Харківський національний університет міського господарства
імені О.М. Бекетова,

²Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. Створено неголономну математичну модель динамічних процесів у кульовому млині. Диференційні рівняння руху кулі у сферичній оболонці, що робить круговий поступальний рух, отримано у формі рівнянь Апеля. У записі функції прискорень використано квазішвидкості. Запропоновано алгоритм перетворення рівнянь Апеля до диференціальних рівнянь першого порядку у формі Коші. Розрахункові дослідження дали змогу встановити важливі закономірності функціонування пристрою.

Ключові слова: кульовий млин, динамічний процес, неголономна математична модель, рівняння Апеля, квазішвидкість.

Вступ

Дроблення та подрібнення різних матеріалів є визначальними в багатьох технологічних процесах. На сучасних виробництвах дрібнодисперсної продукції широко застосовуються барабанні млини, в яких меленими елементами є кулі [1]. Основними перевагами кульових млинів є: простота конструкції, експлуатації та ремонту; висока надійність; значна одинична потужність; можливість зміни режиму подрібнення та отримання гомогенного продукту; досягнення тонкості помелу з високою питомою поверхнею; досить добре розроблене наукове обґрунтування [2].

З-поміж недоліків кульових млинів можна виокремити їх значні металомісткості і знос тіл, що мелють, а також сильний шум (особливо під час ударного водоспадного режиму роботи), наявність застійної зони [3]. Більшість енергії під час роботи кульового млина втрачається марно, що й призводить до низького коефіцієнта корисної дії. Але навіть значна питома витрата електроенергії на подрібнення матеріалу окупається корисним ефектом під час використання млина. Це не унеможливорює пошук рішень щодо економії електроенергії в процесі помелу, чим займаються фахівці з усього світу [4, 5].

Аналіз публікацій

Зусилля сучасних дослідників зосереджені на розв'язанні окремих завдань, пов'язаних з удосконаленням наявних схем кульових барабанних млинів. Є досить значна кількість літературних джерел, що містять ві-

домості про зазначені пристрої. Деякі роботи присвячені моделюванню динамічних процесів у них.

Останнім часом досягнуто суттєвих успіхів у розумінні важливих особливостей механізму функціонування кульового млина здебільшого завдяки широкому впровадженню методу дискретних елементів (МДЕ), що нині є важливим інструментом моделювання динамічних процесів у кульових млинах. Дослідження млинів сухої дії, що передбачають як тіла, що мелють, так і частинки, з використанням МДЕ-моделювання лягли в основу декількох удосконалених моделей кульових млинів [6].

Моделювання процесів подрібнення з використанням МДЕ є, однак, досить складним завданням. Значні труднощі пов'язані із встановленням модельних параметрів, що визначають взаємодію частинок між собою, з кулями та футеруванням млина. Крім цього, необхідні коефіцієнти динамічного й статичного тертя, параметри відновлення для всіх пар матеріалів, що взаємодіють у процесі подрібнення. Ситуація погіршується відсутністю регламентованих методик визначення зазначених параметрів, що вимагає спеціальних експериментальних досліджень з вивчення впливу факторів, які варіюються, на процес подрібнення. Необхідно, звичайно, зважати, що наявність адекватної моделі дає змогу досліднику надалі відмовитися від дорогих реальних експериментів, які здебільшого складно реалізувати [7].

У роботах [8, 9] автори запропонували нову модель кульового млина, в якому робоча камера виконана у формі сферичної оболонки. Робочим тілом млина є куля в камері, яка в процесі руху оболонки обкатує її внутрішню поверхню, руйнуючи та стираючи цементну або іншу сировину. У такій конструкції під час експлуатації унеможливаються ударні режими роботи, не виникають застійні зони.

Останнім часом близькі конструктивні схеми застосовуються в кульових поглиначах вібрацій [10] як альтернативи пасивних вібропоглиначів [11], що використовуються в цивільному будівництві для зменшення вібрації, спричиненої вітром.

Звичайні пасивні поглиначі маятникового типу застосовують автопараметричний резонанс для забезпечення демпфувального ефекту. Хоча вони дуже ефективні та надійні, їх застосування часто утруднене через відсутність місця для монтажу або складності обслуговування.

У статті [12] описано теорію, експерименти та практичне застосування кульового вібропоглинача горизонтального переміщення, а також його ефективність порівняно з маятниковим поглиначем коливань. Система розглядається як неголономна. Вона містить два твердих тіла, що здійснюють плоский рух: колону й кулю, що котиться без ковзання по сферичній виїмці.

Мета й постановка завдання

Мета роботи – створення універсальної математичної моделі динамічних процесів у безударній моделі кульового млина для визначення технологічних якостей пристрою, вибору його раціональних параметрів. Модель має містити основні геометричні, масові властивості кулі, сферичної камери, брати до уваги *неголономний* характер в'язей, накладених на кулю.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання: проаналізувати особливості функціонування технічних об'єктів, основним конструктивним елементом яких є куля, що переміщується у сферичній порожнині; створити математичну модель динамічних процесів у кульовому млині у вигляді рівнянь руху кулі у сферичній оболонці, що робить круговий поступальний рух; записати диференційні рівняння руху кулі у формі *рівнянь Апеля* за допомогою відповідних узагальнених координат і *квазіш-*

видкостей, рівнянь голономних (геометричних) і неголономних в'язей, та *функцій прискорення Апеля*; запропонувати алгоритм перетворення рівнянь Апеля до диференційних рівнянь першого порядку у формі Коші; провести розрахункові дослідження динамічних процесів за допомогою створеної моделі для встановлення важливих закономірностей функціонування пристрою.

Створення методів раціонального вибору параметрів пристрою є актуальним завданням.

Неголономна динамічна модель кульового млина

Розрахункова схема кульового млина.

У новій моделі кульового млина [8, 9] (рис. 1) рама спирається на дві нерухомі опори й має свій незалежний привод для обертання навколо власної осі; на рамі встановлений чотиришарнірний паралелограм, дві сторони якого є кривошипями; кривошипи мають незалежний привод і обертаються синхронно; на кінцях кривошипів закріплено майданчик як одна зі сторін паралелограма; майданчик здійснює круговий поступальний рух; на майданчику встановлено сферичну оболонку, всередині якої є куля – робоче тіло млина; куля під час руху оболонки обкатує його внутрішню поверхню, руйнуючи та стираючи відповідну сировину. Прийнято такі позначки: 1 – нерухома опора; 2 – вал; 3, 6 – зубчасте колесо; 4 – провідне зубчасте колесо; 5 – привод відносного обертання; 7 – рама (вал); 8 – привод обертання; 9, 15 – кривошип; 10 – платформа; 11 – кришка; 12 – куля; 13 – оболонка; 14 – матеріал (клінкер). Запропонована схема унеможливує ударний вплив та «мертву зону».

Динамічна модель руху кулі у сферичній оболонці. У роботі досліджено рух кулі як найважливішого робочого органа млина під час руху сферичної камери, коли закон обертання кривошипів заданий.

Узагальнені координати та квазішвидкості. Розглянемо рух кулі у сферичній камері з центром у точці A і радіусом R , яка здійснює заданий поступальний рух (рис. 2). Камеру в цьому разі можна розглядати як нестационарну в'язь. Радіус кулі з центром у точці C позначимо як r , а точку його торкання зі сферичною поверхнею – P . Розглянемо основну (нерухому) систему координат $O_1x_1y_1z_1$ і рухому систему координат $Oxyz$, що переміщується поступально.

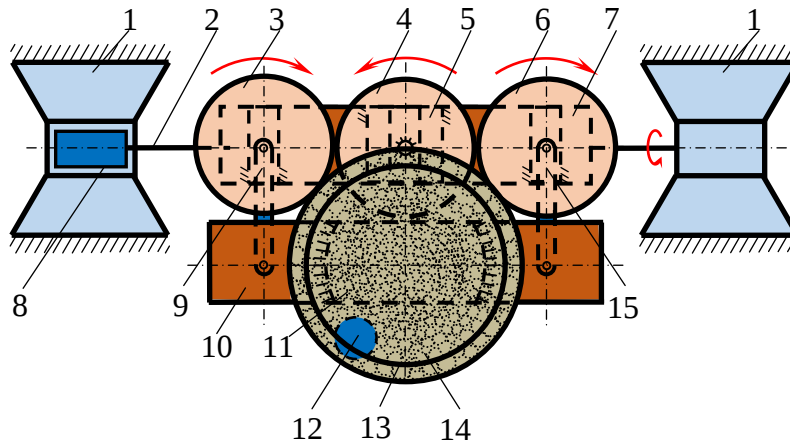


Рис. 1. Схема кульового млина (вид зверху)

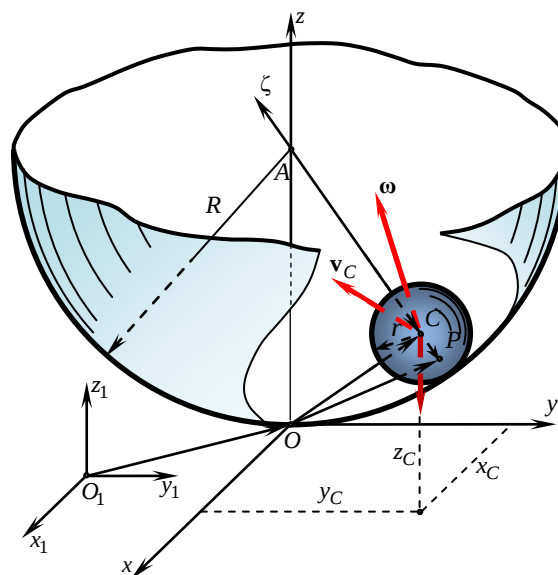


Рис. 2. Схема руху кулі у сферичній камері

За незалежні узагальнені координати приймемо $q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \psi$, $q_4 = \phi$, $q_5 = \vartheta$, де x_C , y_C – координати центру мас кулі у пов'язаній з камерою системі координат; ψ , ϕ , ϑ – кути Ейлера, що визначають положення осей жорстко пов'язаної з кулею системи координат щодо власних осей координат, паралельних Ox , Oy , Oz .

Рівняння голономної (геометричної) в'язі виражено рівнянням

$$z_C = R - \sqrt{(R-r)^2 - x_C^2 - y_C^2}. \quad (1)$$

Рівняння неголономних в'язей знайдемо з умови відсутності ковзання кулі по сферичній поверхні, що виражається рівністю абсолютних швидкостей точок торкання кулі та камери

$$\mathbf{v}_{Pa} = \mathbf{v}_{Pe} + \mathbf{v}_{Pr} = \mathbf{v}_{Oa} + \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overline{CP} = \mathbf{v}_{Oa}, \quad (2)$$

де $\mathbf{v}_{Pa}$, $\mathbf{v}_{Pe} = \mathbf{v}_{Oa}$, $\mathbf{v}_{Pr}$ – абсолютна, переносна та відносна швидкості точки P (переносна швидкість $\mathbf{v}_{Pe}$ у цьому разі збігається з абсолютною швидкістю $\mathbf{v}_{Oa}$ точки O); $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{Cr} = [\dot{x}_C \ \dot{y}_C \ \dot{z}_C]^T$ – швидкість точки C в рухомій координатній системі (відносна швидкість; T – знак транспонування); $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ – миттєва кутова швидкість кулі.

Для вектора $\overline{CP}$ має місце очевидне співвідношення:

$$\overline{CP} = \frac{r}{R-r} (\overline{OC} - \overline{OA}) = \lambda \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C - R \end{bmatrix},$$

де $\lambda = \frac{r}{R-r}$.

З формули (2) випливає, що відносна швидкість точки P дорівнює нулю

$$\mathbf{v}_{Pr} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP} = 0. \quad (3)$$

Оскільки на підставі формули (1) проєкція швидкості C точки на вісь z

$$\dot{z}_C = \frac{x_C \dot{x}_C + y_C \dot{y}_C}{R - z_C}, \quad (4)$$

тоді вираз (3) для $\mathbf{v}_{Pr}$ у розгорнутій формі запишеться так:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ \frac{x_C \dot{x}_C + y_C \dot{y}_C}{R - z_C} \end{bmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C - R \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}_C - \lambda [\omega_y (R - z_C) + \omega_z y_C] \\ \dot{y}_C + \lambda [\omega_x (R - z_C) + \omega_z x_C] \\ \frac{x_C \dot{x}_C + y_C \dot{y}_C}{R - z_C} + \lambda (\omega_x y_C - \omega_y x_C) \end{bmatrix} = 0. \quad (5)$$

Нескладно показати, що третій елемент вектора в останньому стовпці формули (5)

$$\frac{x_C \dot{x}_C + y_C \dot{y}_C}{R - z_C} + \lambda (\omega_x y_C - \omega_y x_C)$$

є лінійною комбінацією виразів для перших двох елементів. Тому умови, що накладаються неголономною в'яззю, виявляються такими:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \lambda [\omega_y (R - z_C) + \omega_z y_C], \\ \dot{y}_C = -\lambda [\omega_x (R - z_C) + \omega_z x_C]. \end{cases} \quad (6)$$

Обчислення енергії прискорень і складання рівнянь Апеля значно спрощується в процесі застосування квазіприскорень замість узагальнених прискорень. Тому прийемо за незалежні квазішвидкості проєкції кутової швидкості на осі x , y , z [19, 20]:

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 = \omega_x = \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ \dot{\pi}_2 = \omega_y = -\dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi + \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \dot{\pi}_3 = \omega_z = \dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (7)$$

Зазначені квазішвидкості відповідають квазікоординатам $\pi_1 = \phi_x$, $\pi_2 = \phi_y$, $\pi_3 = \phi_z$.

Отже, конфігурація системи, що вивчається (куля, яка рухається) визначається п'ятьма узагальненими координатами x_C , y_C , ψ , ϕ , ϑ , але степенів вільності система має тільки три внаслідок двох рівнянь (6).

Рівняння Апеля. Складемо рівняння руху кулі у формі Апеля [19, 20]:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_1} = \Pi_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_2} = \Pi_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_3} = \Pi_3. \quad (8)$$

Тут S – функція прискорень Апеля, що в цьому разі має вигляд

$$S = \frac{1}{2} \left[m (\dot{x}_{1C}^2 + \dot{y}_{1C}^2 + \dot{z}_{1C}^2) + I (\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[m (\ddot{x}_{1C}^2 + \ddot{y}_{1C}^2 + \ddot{z}_{1C}^2) + I (\ddot{\pi}_1^2 + \ddot{\pi}_2^2 + \ddot{\pi}_3^2) \right], \quad (9)$$

де m – маса кулі; $I = \frac{2}{5} m r^2$ – осьовий момент інерції кулі; Π_1 , Π_2 , Π_3 – узагальнені сили, що відповідають квазікоординатам π_1 , π_2 , π_3 .

Для визначення узагальнених сил Π_1 , Π_2 , Π_3 обчислимо віртуальну роботу:

$$\begin{aligned} \delta A &= \Pi_1 \delta \pi_1 + \Pi_2 \delta \pi_2 + \Pi_3 \delta \pi_3 = \\ &= F_x \delta x_{1C} + F_y \delta y_{1C} + F_z \delta z_{1C}. \end{aligned}$$

У цьому разі $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$. Координати точки C в нерухомій системі координат

$$x_{1C} = x_{10} + x_C, \quad y_{1C} = y_{10} + y_C,$$

$$z_{1C} = z_{10} + z_C = z_{10} + R - \sqrt{(R-r)^2 - x_C^2 - y_C^2},$$

до того ж $z_{10} = \text{const} = 0$. Тоді з огляду на (4), (6)

$$\dot{z}_{1C} = \dot{z}_C = \frac{x_C \dot{x}_C + y_C \dot{y}_C}{R - z_C} = -\lambda \dot{\pi}_1 y_C + \lambda \dot{\pi}_2 x_C,$$

тому

$$\delta z_{1C} = -\lambda y_C \delta \pi_1 + \lambda x_C \delta \pi_2.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \delta A &= -mg (-\lambda y_C \delta \pi_1 + \lambda x_C \delta \pi_2) = \\ &= mg \lambda y_C \delta \pi_1 - mg \lambda x_C \delta \pi_2, \end{aligned}$$

а значить

$$\Pi_1 = mg\lambda y_C, \quad \Pi_2 = -mg\lambda x_C, \quad \Pi_3 = 0.$$

Для проєкцій прискорення точки C , зважаючи на формули (4), (6), маємо

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{1C} &= \ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C = \\ &= \ddot{x}_{1O} + \lambda \left[\ddot{\pi}_2 (R - z_C) - \dot{\pi}_2 \dot{z}_C + \ddot{\pi}_3 y_C + \dot{\pi}_3 \dot{y}_C \right], \\ \ddot{y}_{1C} &= \ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C = \\ &= \ddot{y}_{1O} - \lambda \left[\ddot{\pi}_1 (R - z_C) - \dot{\pi}_1 \dot{z}_C + \ddot{\pi}_3 x_C + \dot{\pi}_3 \dot{x}_C \right], \\ \ddot{z}_{1C} &= \ddot{z}_C = -\lambda \dot{\pi}_1 y_C + \lambda \dot{\pi}_2 x_C - \lambda \dot{\pi}_1 \dot{y}_C + \lambda \dot{\pi}_2 \dot{x}_C. \end{aligned} \right\}$$

У записі цих формул взято до уваги, що $\ddot{z}_{1O} = 0$.

Перепишемо формули інакше:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{1C} &= \lambda (R - z_C) \ddot{\pi}_2 + \lambda y_C \ddot{\pi}_3 + \\ &\quad + \lambda (\dot{\pi}_3 \dot{y}_C - \dot{\pi}_2 \dot{z}_C) + \ddot{x}_{1O}, \\ \ddot{y}_{1C} &= -\lambda (R - z_C) \ddot{\pi}_1 - \lambda x_C \ddot{\pi}_3 - \\ &\quad - \lambda (\dot{\pi}_3 \dot{x}_C - \dot{\pi}_1 \dot{z}_C) + \ddot{y}_{1O}, \\ \ddot{z}_{1C} &= -\lambda y_C \ddot{\pi}_1 + \lambda x_C \ddot{\pi}_2 - \\ &\quad - \lambda (\dot{\pi}_1 \dot{y}_C - \dot{\pi}_2 \dot{x}_C). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

З огляду на формули (10) похідні від енергії прискорень:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_1} &= m \ddot{x}_{1C} \frac{\partial \ddot{x}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_1} + m \ddot{y}_{1C} \frac{\partial \ddot{y}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_1} + m \ddot{z}_{1C} \frac{\partial \ddot{z}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_1} + I \ddot{\pi}_1 = \\ &= I \ddot{\pi}_1 - \lambda m \left[(R - z_C) (\ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C) + y_C \ddot{z}_C \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_2} &= m \ddot{x}_{1C} \frac{\partial \ddot{x}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_2} + m \ddot{y}_{1C} \frac{\partial \ddot{y}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_2} + m \ddot{z}_{1C} \frac{\partial \ddot{z}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_2} + I \ddot{\pi}_2 = \\ &= I \ddot{\pi}_2 + \lambda m \left[(R - z_C) (\ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C) + x_C \ddot{z}_C \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_3} &= m \ddot{x}_{1C} \frac{\partial \ddot{x}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_3} + m \ddot{y}_{1C} \frac{\partial \ddot{y}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_3} + m \ddot{z}_{1C} \frac{\partial \ddot{z}_{1C}}{\partial \ddot{\pi}_3} + I \ddot{\pi}_3 = \\ &= I \ddot{\pi}_3 + \lambda m \left[y_C (\ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C) - x_C (\ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C) \right]. \end{aligned}$$

Тепер рівняння Апеля (8) набувають такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} I \ddot{\pi}_1 - \lambda m \left[(R - z_C) (\ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C) + y_C \ddot{z}_C \right] &= mg\lambda y_C, \\ I \ddot{\pi}_2 + \lambda m \left[(R - z_C) (\ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C) + x_C \ddot{z}_C \right] &= -mg\lambda x_C, \\ I \ddot{\pi}_3 + \lambda m \left[y_C (\ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C) - x_C (\ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C) \right] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

або, зважаючи на позначки в (7),

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \alpha \left[(R - z_C) (\ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C) + y_C (\ddot{z}_C + g) \right], \\ \dot{\omega}_y &= -\alpha \left[(R - z_C) (\ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C) + x_C (\ddot{z}_C + g) \right], \\ \dot{\omega}_z &= -\alpha \left[y_C (\ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C) - x_C (\ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C) \right], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

де $\alpha = \frac{\lambda}{\rho^2}$, $\rho^2 = \frac{I}{m}$ – квадрат радіуса інерції кулі.

Для наступного рівняння виправдано записати

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \alpha_{12} \ddot{y}_C + \alpha_{13} \ddot{z}_C + \beta_1, \\ \dot{\omega}_y &= \alpha_{21} \ddot{x}_C + \alpha_{23} \ddot{z}_C + \beta_2, \\ \dot{\omega}_z &= \alpha_{31} \ddot{x}_C + \alpha_{32} \ddot{y}_C + \beta_3, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

де $\alpha_{12} = -\alpha_{21} = \alpha(R - z_C)$, $\alpha_{13} = -\alpha_{31} = \alpha y_C$,
 $\alpha_{23} = -\alpha_{32} = -\alpha x_C$, $\beta_1 = \alpha[(R - z_C)\ddot{y}_{1O} + y_C g]$,
 $\beta_2 = -\alpha[(R - z_C)\ddot{x}_{1O} + x_C g]$,
 $\beta_3 = -\alpha(y_C \ddot{x}_{1O} - x_C \ddot{y}_{1O})$.

Диференційні рівняння (12) необхідно інтегрувати разом із виразами неголономних в'язей (6), що є фактично також диференційними рівняннями.

Праві частини рівнянь (12), (6) за допомогою виразів (1), (4), (10) мають бути виражені як x_C , y_C , ω_x , ω_y , ω_z .

Перетворення рівнянь Апеля до диференційних рівнянь у формі Коші. Безпосереднє інтегрування рівнянь (12), (6) з використанням дуже поширених чисельних алгоритмів неможливо. Рівняння мають бути подані у вигляді Коші, тобто розв'язані щодо похідної однієї з функцій, що шукаються. У розглядуваному випадку – $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$, $\dot{x}_C$, $\dot{y}_C$. Рівняння (6) мають необхідну структуру. Однак праві частини рівнянь (12) залежать також від $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ (див. формули (10) і (7)). Тому ці рівняння необхідно розв'язати щодо зазначених похідних. Якби матриця, утворена з коефіцієнтів за умови похідних $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ відповідної системи лінійних рівнянь, мала постійні елементи, то знаходження зворотної до неї та подання рівнянь у формі, зручній для чисельного інтегрування, було б тривіальним завданням. Оскільки елементи матриці є змінними, знаходження її зворотної є трудомісткою операцією. У ро-

боті за умови чисельної реалізації алгоритму кращим виявилось розв'язати систему рівнянь (12) щодо $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ за допомогою формул Крамера. Остаточно система диференціальних рівнянь (12), (6) у формі Коші набуває такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_x &= f_{\omega_x}(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t), \\ \dot{\omega}_y &= f_{\omega_y}(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t), \\ \dot{\omega}_z &= f_{\omega_z}(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t), \\ \dot{x}_C &= f_{x_C}(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t), \\ \dot{y}_C &= f_{y_C}(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} f_{\omega_x} &= \frac{\Delta_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t)}{\Delta(x_C, y_C)}, \\ f_{\omega_y} &= \frac{\Delta_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t)}{\Delta(x_C, y_C)}, \\ f_{\omega_z} &= \frac{\Delta_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_C, y_C, t)}{\Delta(x_C, y_C)}, \end{aligned}$$

$$\Delta(x_C, y_C) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11},$$

$$\Delta_1(x_C, y_C) = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + b_2a_{32}a_{13} - b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}b_1,$$

$$\Delta_2(x_C, y_C) = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{21}b_3a_{12} - a_{31}b_2a_{13} - a_{21}b_1a_{33} - b_3a_{23}a_{11},$$

$$\Delta_3(x_C, y_C) = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + a_{21}a_{32}b_1 - a_{31}a_{22}b_1 - a_{21}a_{12}b_3 - a_{32}b_2a_{11},$$

$$\begin{aligned} f_{x_C} &= \lambda[\omega_y(R - z_C) + \omega_z y_C], \\ f_{y_C} &= -\lambda[\omega_x(R - z_C) + \omega_z x_C]. \end{aligned}$$

Початкові умови для задачі Коші в такому вигляді: якщо $t = 0$,

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x0}, \quad \omega_y = \omega_{y0}, \quad \omega_z = \omega_{z0}, \quad x_C = x_{C0}, \\ y_C &= y_{C0}. \end{aligned}$$

Закон руху сферичної камери в цьому разі має бути заданий

$$x_{10} = x_{10}(t), \quad y_{10} = y_{10}(t). \quad (14)$$

Отже, після схематизації математична модель пристрою є системою з неголоном-

ними в'язями. Ця обставина серйозно ускладнює розв'язання задачі, і це є однією з причин того, що в динаміці машин, механізмів такі задачі розглядаються відносно рідко. Зокрема після того, як математична модель динамічних процесів у кульовому млині була подана у формі рівнянь Апеля, їх перетворення до рівнянь Коші з огляду на неголономні в'язі (для подальшого чисельного інтегрування) через їх складність і громіздкість практично виявилось можливим лише з використанням символьної математики, реалізованої в сучасних математичних пакетах. У подальших розрахунках з цією метою використовувався символьний процесор математичного пакета *MathCAD*, за допомогою якого розроблені відповідні комп'ютерні програми.

Після інтегрування диференціальних рівнянь руху (13) з'являється можливість визначення двох важливих технологічних якостей пристрою: траєкторії руху точки торкання кулі по внутрішній поверхні сферичної камери; сили тиску кулі на камеру (за модулем збігається з радіальною реакцією оболонки).

Траєкторія точки торкання кулі зі сферою. З умов пропорційності (див. рис. 2) маємо:

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{R}{R-r} x_C, \quad y_P = \frac{R}{R-r} y_C, \\ z_P &= \frac{R}{R-r} (z_C - r). \end{aligned}$$

Сила тиску кулі на камеру. Для знаходження радіальної реакції оболонки зручно скористатися відомою теоремою про рух центру мас

$$m\mathbf{a}_C = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (15)$$

де

$\mathbf{a}_C = a_{Cx}\mathbf{i}_1 + a_{Cy}\mathbf{j}_1 + a_{Cz}\mathbf{k}_1 = a_{Cx}\mathbf{i} + a_{Cy}\mathbf{j} + a_{Cz}\mathbf{k}$ – прискорення центру мас ($\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ – одиничні вектори осей системи координат $O_1x_1y_1z_1$; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – одиничні вектори осей системи координат $Oxyz$); $\mathbf{R}^{(e)}$ – основний вектор зовнішніх сил, прикладених до кулі.

У цьому разі вираз (15) набуває вигляду

$$m\mathbf{a}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}, \quad (16)$$

де $m\mathbf{g}$ – сила тяжіння (див. рис. 2); $\mathbf{N}$ – радіальна (нормальна) реакція; $\mathbf{F}_{тр}$ – сила тер-

тя, розташована в дотичній площині (на рисунку не показані).

Необхідно зауважити, що вираз (16) є одним із рівнянь методу кінетостатики (принципу Даламбера).

Позначимо гострі кути, які утворюють вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ з прямою CA , як α , β , γ відповідно. Для косинусів цих кутів справедливі вирази (див. рис. 2):

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x_C}{R-r}, \quad \cos \beta = \frac{y_C}{R-r}, \\ \cos \gamma &= \frac{R-z_C}{R-r}.\end{aligned}\quad (17)$$

Тепер спроекуємо вираз (16) на вісь $C\zeta$, спрямовану від C к A (див. рис. 2),

$$\begin{aligned}-ma_{Cx_1} \cos \alpha - ma_{Cy_1} \cos \beta + ma_{Cz_1} \cos \gamma = \\ = -mg \cos \gamma + N_\zeta + F_{тр_\zeta}.\end{aligned}$$

Оскільки сила тертя перпендикулярна нормалі, то $F_{тр_\zeta} = 0$, і з останнього виразу для нормальної реакції маємо

$$\begin{aligned}N = N_\zeta = -m(a_{Cx_1} \cos \alpha + a_{Cy_1} \cos \beta - \\ -(a_{Cz_1} + g) \cos \gamma)\end{aligned}$$

або остаточно, зважаючи на формули (17),

$$N = -m \left(a_{Cx_1} \frac{x_C}{R-r} + a_{Cy_1} \frac{y_C}{R-r} + (a_{Cz_1} + g) \frac{z_C - R}{R-r} \right) \quad (18)$$

Проекції прискорення з огляду на формули (10)

$$\begin{aligned}a_{Cx_1} &= \ddot{x}_{1C} = \ddot{x}_{1O} + \ddot{x}_C, \\ a_{Cy_1} &= \ddot{y}_{1C} = \ddot{y}_{1O} + \ddot{y}_C, \\ a_{Cz_1} &= \ddot{z}_{1C} = \ddot{z}_C.\end{aligned}$$

Однак унаслідок численного інтегрування диференціальних рівнянь (13) визначаються лише значення x_C , y_C , z_C в дискретні моменти часу ($x_{1O}(t)$, $y_{1O}(t)$ – відомі функції). Ефективно визначати значення інших похідних $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{z}_C$ у цій ситуації також дають змогу засоби символічної математики. У розроблених програмах спочатку за допомогою кубічної сплайн-апроксимації будуються функції $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{z}_C$ за дискретними значеннями t і x_C , y_C , z_C . Потім за допомогою симво-

льного процесора знаходяться аналітичні вирази для $\ddot{x}_C(t)$, $\ddot{y}_C(t)$, $\ddot{z}_C(t)$.

Моделювання запуску пристрою з електродвигуном. Для формування закону руху сферичної камери (14) приймалося, що залежність кутової швидкості ротора електродвигуна від часу за умови увімкнення пристрою має вигляд, наведений на графіку (рис. 3) [21].

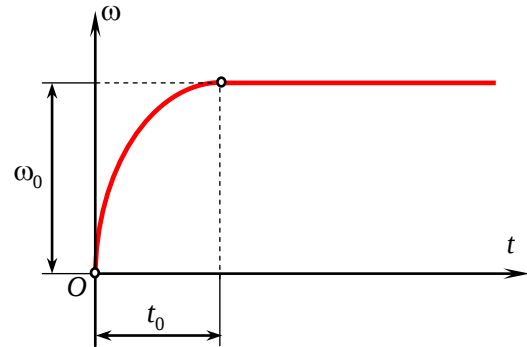


Рис. 3. Закон зміни кутової швидкості електродвигуна під час пуску

Для інтервалу часу $0 \leq t \leq t_0$ взято квадратичний закон зміни кутової швидкості, що добре узгоджується з показниками експериментів. Залежність кута повороту ротора електродвигуна від часу виявляється в цьому разі такою:

$$\psi = \begin{cases} -\frac{\omega_0(t-t_0)^3}{3t_0^2} + \omega_0 t - \frac{\omega_0 t_0}{3}, & t \leq t_0; \\ \frac{2}{3}\omega_0 t_0 + \omega_0(t-t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

де ω_0 – усталена кутова швидкість режиму (керований параметр); t_0 – час встановлення.

Розрахункові дослідження динамічних процесів

Створена математична модель динамічних процесів у кульовому млині покладена в основу алгоритму, реалізованого засобами математичного пакета *MathCAD*. Дослідження за допомогою розробленої програми проводилися для таких значень параметрів млина: $r = 0.025$ м – радіус кулі; $R = 0.25$ м – радіус сферичної камери; $l = 0.5$ м – довжина кривошипа; $n_0 = 60$ хв⁻¹ – усталена частота обертання кривошипа.

На рис. 4 зображена залежність аплікати z_P точки торкання кулі та камери P за умови «швидкого» пуску пристрою; час встановлення – $t_0 = 2.5$ с. Відповідна траєкторія в

площині Oxy подана на рис. 5. Фактично це своєрідне «кільце» значної ширини.

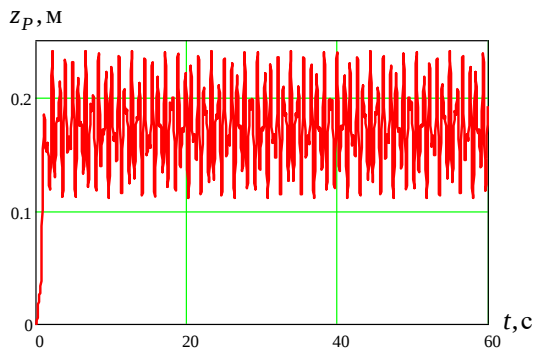


Рис. 4. Залежність координати z_p точки торкання від часу ($t_0=2,5$ с)

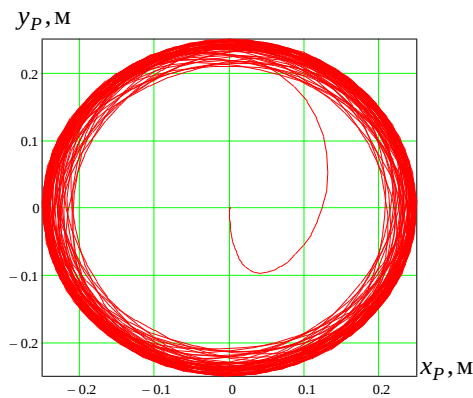


Рис. 5. Траєкторія руху точки торкання кулі та сфери в проєкції на площину Oxy ($t_0=2,5$ с)

З наведених графіків випливає, що в русі кулі відсутня тенденція виходу на певний усталений режим. Зумовлено це тим, що динамічна модель млина першого етапу не бере до уваги розсіювання енергії. Траєкторія формує кільце. Що коротший був процес запуску, то більшої ширини кільце. Доказом цього є графіки (рис. 6, 7).

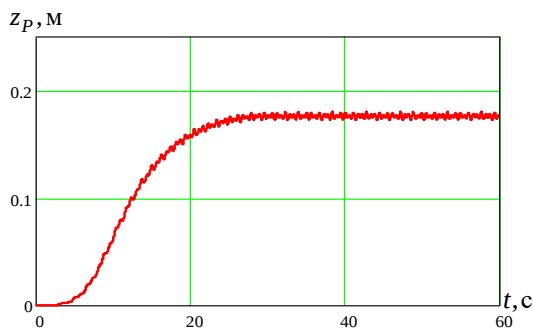


Рис. 6. Залежність координати z_p точки торкання від часу ($t_0=30$ с)

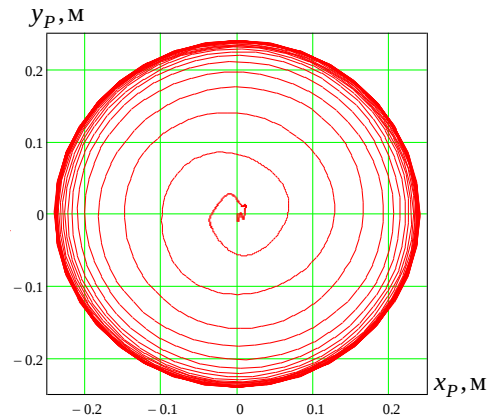


Рис. 7. Траєкторія руху точки торкання кулі та сфери в проєкції на площину Oxy ($t_0=30$ с)

На відміну графіків на рис. 4, 5, останні побудовані для «повільного» запуску; час встановлення – $t_0=30$ с.

На відміну від графіка на рис. 4, глобальне зростання аплікати z_p на графіку, зображеному на рис. 6, має місце на більш тривалому інтервалі часу.

В останньому випадку цей процес супроводжується коливаннями значно меншого розмаху, ніж у першому випадку. Кільце траєкторії на рис. 7, на відміну від рис. 5, також є значно вузьким.

Графіки на рис. 8, 9 ілюструють характер зміни тиску кулі на оболонку за умови «швидкого» та «повільного» запуску пристрою. Для часу встановлення $t_0=2,5$ с розмахи коливань тиску досягають 9,Н; в умовах тривалого запуску ($t_0=30$ с) – менше ніж 1,Н.

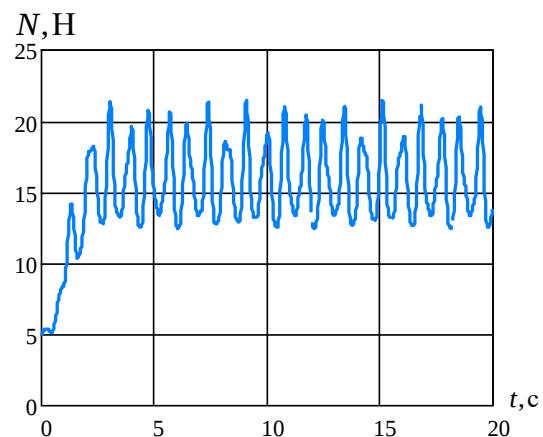


Рис. 8. Залежність сили тиску кулі на камеру від часу ($t_0=2,5$ с)

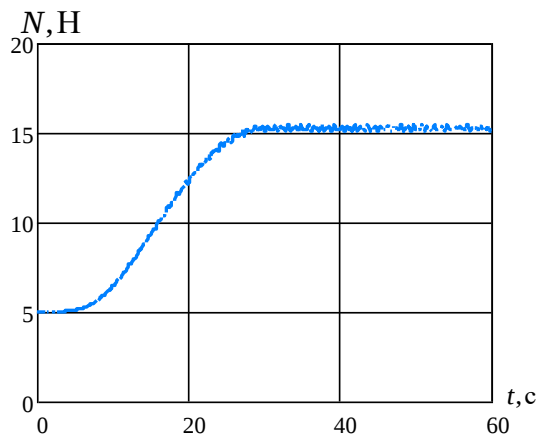


Рис. 9. Залежність сили тиску кулі на камеру від часу ($t_0=30\text{с}$)

Висновки

1. Проаналізовано особливості технічних об'єктів, у яких основною функціональною ланкою є куля, що переміщується у сферичній порожнині.

2. Створено математичну модель динамічних процесів у кульовому млині у вигляді диференціальних рівнянь руху кулі в сферичній оболонці, що робить круговий поступальний рух.

3. Диференціальні рівняння руху записано у формі рівнянь Апеля; у процесі запису функції прискорень виявилось, що ефективно використовувати квазішвидкості.

4. Розроблено алгоритм перетворення рівнянь Апеля до диференціальних рівнянь першого порядку у формі Коші.

5. Запропоновано алгоритм побудови траєкторій точки торкання кулі з внутрішньою поверхнею сферичної камери.

6. Розроблено алгоритм визначення сили тиску на сферичну оболонку кулі під час її руху.

7. Проведені розрахункові дослідження динамічних процесів за допомогою створеної моделі дали змогу встановити важливі закономірності функціонування пристрою, наприклад, залежність властивостей «кільця» траєкторій, сили тиску на сферичну оболонку від швидкості запуску та кутової швидкості кривошипа.

8. Найважливішим напрямом подальшого вдосконалення динамічної моделі кульового млина є більш коректний опис взаємодії кулі з оболонкою з огляду на опір подрібнюваної суміші його перекочуванню.

Література

1. Adhikari, S., Ali, F. (2013). Energy Harvesting Dynamic Vibration Absorbers. *J. App. Mech.*

Vol. 80. 1–9.

2. Rodrigo, M. de Carvalho, Tulio, M. Campos, Patricia, M. Faria, Luís, Marcelo Tavares. (2021). Mechanistic modeling and simulation of grinding iron ore pellet feed in pilot and industrial-scale ball mills. *Powder Technology*, 392. 489–502.
3. Zhang, Z.-L., Chen, J.-B., Li, J. (2014). Theoretical study and experimental verification of vibration control of offshore wind turbines by a ball vibration absorber. *Structure and Infrastructure Engineering*. Taylor & Francis. Vol. 10. № 8. 1087–1100.
4. Harish Hanumanthappa, Harsha Vardhan, Govinda Raj Mandela, Marutiram Kaza, Rameshwar Sah, & Bharath Kumar Shanmugam. (2020). A comparative study on a newly designed ball mill and the conventional ball mill performance with respect to the particle size distribution and recirculating load at the discharge end. *Minerals Engineering*, 145(1), 106091.
5. Ting Wang, Wenjie Zou, Ruijing Xu, Huaibing Xu, Le Tao, Jianjun Zhao, Yi He. (2021). Assessing load in ball mill using instrumented grinding media. *Minerals Engineering*, 173(1), 107198.
6. Lvov, V.V., Chitalov, L.S. (2020). Modern trends in the design of processes and equipment for grinding of ores of non-ferrous metals. *Non-ferrous Metals*, 10. 20–26.
7. le Roux, J.D., Steinbeck, A., Kugi, A., Craig, I.K. (2020). Steady-state and dynamic simulation of a grinding mill using grind curves. *Minerals Engineering*, 152. 1–21.
8. Шатохін, В.М., Дерев'янка, М.І., Гранько, Б.Ф., Клименко, М.В. (2018). До динаміки роторного резонансного кульового млина з однією кулею та двома степенями вільності. *Науковий вісник будівництва*, 2(92). 241–244.
9. Шатохін, В.М., Гранько, Б.Ф., Соболев, В.М. (2022). Неголономна динамічна модель кульового млина. *Modern research in world science. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. SPC "Sci-conf.com.ua"*. Lviv, Ukraine. 273–280.
10. N'aprstek, J., Fischer, C. (2017). Non-holonomic dynamics of a ball moving inside a spherical cavity. *Procedia Engineering*, 199. 613–618.
11. Vigié, Régis, Kerschen, Gaëtan. (2019). Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: A tuning methodology. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3–5). 780–793.
12. Pirner, M., Fischer, O. (2012). The development of a ball vibration absorber for the use on towers. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 41. 91–99.
13. N'aprstek, J., Fischer, C., Pirner, M., Fischer, O. (2011). Non-linear dynamic behaviour of a ball vibration absorber, in: M. Papadrakakis, M. Fragiadakis, V. Plevris (Eds.), *Proc. COMPDYN, ECCOMAS – NTU Athens, Kerkyra, Corfu, 2011, CD ROM, paper 180, 14 pgs.*

14. Legeza, V. (2012). Determination of the amplitude-frequency characteristic of the new roller damper for forced oscillations. *Journal of Automation and Information Sciences*, 34. 32–39.
15. Náprstek, J., Fischer, C. (2016). Dynamic behavior and stability of a ball rolling inside a spherical surface under external excitation, in: A. Zingoni (Ed.), *Insights and innovations in structural engineering, mechanics and computation*, Taylor & Francis, London. 214–219.
16. Legeza, V.P. (2016). Dynamics of Vibration Isolation System with a Ball Vibration Absorber. *IntApplMech*, 54. 584–593.
17. Zhengbing, Hu, Legeza, V.P., Dychka, I.A., Legeza, D.V. (2018). Mathematical Model of the Damping Process in a One System with a Ball Vibration Absorber. *Int. J. Intelligent Systems and Applications (IJISA)*, 10(1). 24–33.
18. Li, J., Zhang, Z., Chen, J. (2012). Experimental study on vibration control of offshore wind turbines using a ball vibration absorber. *J. Energy and Power Eng.*, 4. 153–157.
19. Lurie, A.I. (2002). *Analytical Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag.
20. Pars, L. (1972). *A Treatise on Analytical Dynamics*, 2 ed. Connecticut, USA: Ox Bow Press.
21. Shatokhin, V.M., Sobol, V.N., Wójcik, W., Musabekova, A., Baitussupov, D. (2019). Dynamical processes simulation of vibrational mounting devices and synthesis of their parameters. *Przegląd Elektrotechnicz*, 4. 86–92.
6. Lvov, V.V., Chitalov, L.S. (2020). Modern trends in the design of processes and equipment for grinding of ores of non-ferrous metals. *Non-ferrous Metals*, 10. 20–26.
7. le Roux, J.D., Steinbeck, A., Kugi, A., Craig, I.K. (2020). Steady-state and dynamic simulation of a grinding mill using grind curves. *Minerals Engineering*, 152. 1–21.
8. Shatokhin, V.M., Derevyanko, N.I., Granko, B.F., Klimenko, M.V. (2018). On the dynamics of a rotary resonant ball mill with one ball and two degrees of freedom. *Naukovij vistnik budivnictva*, 2(92). 241–244.
9. Shatokhin, V.M., Granko, B.F., Sobol, V.M. (2022). Non-holonomic dynamic model of a ball mill. Modern research in world science. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. SPC “Sci-conf.com.ua”. Lviv, Ukraine. 273–280.
10. Náprstek, J., Fischer, C. (2017). Non-holonomic dynamics of a ball moving inside a spherical cavity. *Procedia Engineering*, 199. 613–618.
11. Viguié, Régis, Kerschen, Gaëtan. (2019). Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: A tuning methodology. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3–5). 780–793.
12. Pirner, M., Fischer, O. (2012). The development of a ball vibration absorber for the use on towers. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 41. 91–99.
13. Náprstek, J., Fischer, C., Pirner, M., Fischer, O. (2011). Non-linear dynamic behaviour of a ball vibration absorber, in: M. Papadrakakis, M. Fragiadakis, V. Plevris (Eds.), *Proc. COMPDYN, ECCOMAS – NTU Athens*, Kerkyra, Corfu, 2011, CD ROM, paper 180, 14 pgs.
14. Legeza, V. (2012). Determination of the amplitude-frequency characteristic of the new roller damper for forced oscillations. *Journal of Automation and Information Sciences*, 34. 32–39.
15. Náprstek, J., Fischer, C. (2016). Dynamic behavior and stability of a ball rolling inside a spherical surface under external excitation, in: A. Zingoni (Ed.), *Insights and innovations in structural engineering, mechanics and computation*, Taylor & Francis, London. 214–219.
16. Legeza, V.P. (2016). Dynamics of Vibration Isolation System with a Ball Vibration Absorber. *IntApplMech*, 54. 584–593.
17. Zhengbing, Hu, Legeza, V.P., Dychka, I.A., Legeza, D.V. (2018). Mathematical Model of the Damping Process in a One System with a Ball Vibration Absorber. *Int. J. Intelligent Systems and Applications (IJISA)*, 10(1). 24–33.
18. Li, J., Zhang, Z., Chen, J. (2012). Experimental study on vibration control of offshore wind turbines using a ball vibration absorber. *J. Energy and Power Eng.*, 4. 153–157.
19. Lurie, A.I. (2002). *Analytical Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag.

References

1. Adhikari, S., Ali, F. (2013). Energy Harvesting Dynamic Vibration Absorbers. *J. App. Mech.* Vol. 80. 1–9.
2. Rodrigo, M. de Carvalho, Tulio, M. Campos, Patricia, M. Faria, Luís, Marcelo Tavares. (2021). Mechanistic modeling and simulation of grinding iron ore pellet feed in pilot and industrial-scale ball mills. *Powder Technology*, 392. 489–502.
3. Zhang, Z.-L., Chen, J.-B., Li, J. (2014). Theoretical study and experimental verification of vibration control of offshore wind turbines by a ball vibration absorber. *Structure and Infrastructure Engineering*. Taylor & Francis. Vol. 10. № 8. 1087–1100.
4. Harish Hanumanthappa, Harsha Vardhan, Govinda Raj Mandela, Marutiram Kaza, Rameshwar Sah, Bharath Kumar Shanmugam. (2020). A comparative study on a newly designed ball mill and the conventional ball mill performance with respect to the particle size distribution and recirculating load at the discharge end. *Minerals Engineering*, 145(1), 106091.
5. Ting Wang, Wenjie Zou, Ruijing Xu, Huaibing Xu, Le Tao, Jianjun Zhao, Yi He. (2021). Assessing load in ball mill using instrumented grinding media. *Minerals Engineering*, 173(1), 107198.

20. Pars, L. (1972). *A Treatise on Analytical Dynamics*, 2 ed. Connecticut, USA: Ox Bow Press.
21. Shatokhin, V.M., Sobol, V.N., Wójcik, W., Musabekova, A., Baitussupov, D. (2019). Dynamical processes simulation of vibrational mounting devices and synthesis of their parameters. *Przegląd Elektrotechnicz*, 4. 86–92.

Шатохін Володимир Михайлович¹, д.т.н., проф. каф. теоретичної і будівельної механіки, тел. +38 099-461-89-67, e-mail: shatokhinvlm@gmail.com

¹Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, 61002, Україна, м. Харків, вул. Маршала Бажанова, 17.

Красніков Сергій Васильович², к.т.н., доц. кафедри деталей машин та теорії механізмів і машин, тел. +38 057-707-37-30, e-mail: vsevavr@ukr.net

²Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 61002, Україна, м. Харків, вул. Ярослава Мудрого, 25.

Research of dynamic processes in a non-holonomic ball mill model

Annotation. Problem. Creation of a universal mathematical model of dynamic processes in a shockless ball mill model to determine the technological qualities of the device and select its rational parameters. **Goal.** A nonholonomic mathematical model of dynamic processes in a ball mill has been created. Differential equations of motion of a ball in a spherical shell that performs circular translational motion are obtained in the form of the Appel equations. When writing the acceleration function, quasi-velocities were used. An algorithm for converting the Appel equations into first-order differential equations in the Cauchy form is proposed. The computational studies carried out made it possible to establish important regularities in the operation of the device. **Methodology.** A mathematical model of dynamic processes in a ball mill has been created. The equations of motion of a ball in a spherical shell, which makes a circular translational motion, have been obtained in the form of the Appel equations. An algorithm for their transformation into ordinary first-order differential equations in the Cauchy form has been proposed. Computational studies have been

carried out using the developed model. Important regularities of the influence of parameters on the technological indicators of the device have been established. **Results.** A mathematical model of dynamic processes in a ball mill has been created. The equations of motion of a ball in a spherical shell, which makes a circular translational motion, have been obtained in the form of the Appel equations. An algorithm for their transformation into ordinary first-order differential equations in the Cauchy form has been proposed. Computational studies have been carried out using the developed model. Important regularities of the influence of parameters on the technological indicators of the device have been established. **Originality.** For the first time, a non-holonomic mathematical model of dynamic processes in a ball mill is presented in the form of the Appel equations. It is shown that the calculation of the acceleration energy and the formulation of the equations are significantly simplified when quasi-accelerations are used instead of generalized accelerations. **Practical significance.** The created model allows you to calculate the trajectories of the point of contact of the ball with the spherical chamber, the pressure force on the shell, which is important from a technological point of view for choosing rational parameters of the device.

Key words: ball mill, dynamic process, nonholonomic mathematical model, Appel equations, quasi-velocity.

Shatokhin Vladimir¹, Doct. of Sciences, Professor, professor of the Department of Theoretical and Structural mechanics, tel. +38 099-461-89-67, e-mail: shatokhinvlm@gmail.com

¹O.M. Beketov national university of urban economy in Kharkiv, 17, Marshal Bazhanov street, Kharkiv, 61002, Ukraine.

Krasnikov S.V.², Ph.D., Assoc. Prof., Department of Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms, tel. +38 057-707-37-30, e-mail: vsevavr@ukr.net

²Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslav Mudry street, Kharkiv, 61002, Ukraine.