КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 531.31, 632.548 **DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2024.106.0.132**

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ ЛАМБЕРТА В ПРОЦЕСІ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ БАЛІСТИКИ ДЛЯ ПОЛОГИХ ТРАЄКТОРІЙ ПОЛЬОТУ МАТЕРІАЛЬНОГО ТІЛА З УРАХУВАННЯМ ГАЗОПОДІБНОГО (ПОВІТРЯНОГО) СЕРЕДОВИЩА

Задорожний А. О.[1], Стаховський О. В.[2], Човнюк Ю. В.[3], Бугаєвський С.О.[4]
[1] Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»,
[2] Національний університет оборони, м. Київ
[3] Київський національний університет будівництва і архітектури,
[4] Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *У роботі подано приклад застосування спеціальної функції Ламберта для розв'язання задач балістики матеріального тіла, коли враховується опір газоподібного (повітряного) середовища. Розглянуті фізико-механічна й математична моделі, що адекватно описують основні параметри квадратичного (за швидкістю руху точки) опору середовища в межах наближення пологої (настильної) траєкторії. Отримані в роботі результати можуть бути надалі використані для вдосконалення й уточнення інженерних методів розраховування в задачах зовнішньої балістики матеріального тіла з огляду на квадратичний (за швидкості руху) опір повітряного середовища.*

Ключові слова: *аналітичний підхід, розв'язок, спрощені рівняння руху, матеріальне тіло, повітряне середовище, балістика, квадратичний за швидкістю руху опір, задачі зовнішньої балістики, пологі траєкторії руху.*

Вступ

Задачі балістики матеріального тіла належать до класичних. Протягом багатьох років їх традиційно розглядають у підручниках з теоретичної механіки в розділі динаміки матеріального тіла. Але інтерес до цих задач пов'язаний не тільки з навчальним процесом, але й з численними застосуваннями їх у різноманітних галузях людської діяльності: це розрахунки точності стрільби різними видами боєприпасів у військовій справі, аналіз ефективності використання спеціального обладнання будівельної індустрії у задачах торкретування бетонних сумішей, пневмосепарування зернових сумішей у сільськогосподарському виробництві, дослідження динаміки частинок розпилених струменів під час пожежогасіння й зрошування рослин, розрахування переносу дрібнодисперсних частинок повітряними потоками в екології, тощо в цивільних сферах. Тому задачі балістики матеріального тіла розглядають не тільки під час вивчення дисципліни Теоретична механіка, але й у спеціальній літературі.

На відміну від відомих досліджень, для розв'язання задач балістики матеріального тіла в межах спрощених рівнянь руху для пологих (настильних) траєкторій застосовується спеціальна функція Ламберта. Завдяки цьому й створеним у [1] таблицям цієї функції суттєво спрощуються процеси розрахування параметрів траєкторії руху, зокрема її горизонтальної протяжності, часу польоту тощо.

Аналіз публікацій

Задачі балістики матеріального тіла розглянуті в курсах теоретичної механіки [2, 3], а також у спеціальній літературі [5–9]. Проте, на відміну від цитованих вище джерел літератури, у цьому дослідженні, як і в [1], для розв'язання спрощених рівнянь руху матеріального тіла в задачах балістики для пологих траєкторій використані властивості спеціальної функції Ламберта, що й дозволяє суттєво спростити алгоритм розрахування параметрів траєкторії руху пологого (настильного) типу.

Мета та постановка завдання

Мета роботи полягає в обґрунтуванні моделі руху матеріального тіла для пологих траєкторій у задачах зовнішньої балістики й у визначенні основних параметрів таких типів траєкторій руху під час застосування спеціальної функції Ламберта, на відміну від відомого розв'язку Дідіона [4].

Виклад основного матеріалу

Систему диференціальних рівнянь, які описують рух матеріального тіла в спокійному газоподібному середовищі (повітрі) з квадратичним опором, можна записати так [1, 2]:

$$\begin{cases} \ddot{x} + K \cdot \dot{x} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} = 0; \\ \ddot{y} + K \cdot \dot{y} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} = -g, \end{cases} \quad (1)$$

тобто система записана в прямокутній системі координат XOY. Тут, у (1), введені такі позначення: $K-$коефіцієнт парусності, $[K]=$м$^{-1}$; $g-$ прискорення вільного падіння ($g = 9{,}81$м/с^2).

Систему (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = y(0) = 0; \ \dot{x}(0) = = v_0 \cdot \cos\theta_0; \ \dot{y}(0) = v_0 \cdot \sin\theta_0, \quad (2)$$

де θ_0-кут нахилу вектора початкової швидкості руху $\vec{v}_0$ до горизонту.

Орієнтуючись на отримання замкненого аналітичного наближеного розв'язку задачі балістики матеріального тіла, надалі обмежимось кутами $0 < \theta_0 < 20^0$. Таке обмеження доволі часто спостерігається у практичній діяльності:

$$\dot{x}^2 >> \dot{y}^2, \ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \approx \dot{x}. \quad (3)$$

Тому, замість (1), надалі будемо розв'язувати спрощену систему диференціальних рівнянь для пологих (настильних) траєкторій руху матеріального тіла:

$$\begin{cases} \ddot{x} + K \cdot \dot{x}^2 = 0; \\ \ddot{y} + K \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} = -g \end{cases} \quad (4)$$

за початкових умов (2).

Розв'язок спрощеної задачі Коші (4), (2) можна записати так:

$$x(t) = \frac{1}{K} \cdot \ln(1 + K \cdot v_1 \cdot t); \quad (5)$$

$$y(t) = b \cdot \ln(1 + K \cdot v_1 \cdot t)^2 - - \frac{g}{(2K \cdot v_1)^2} \cdot \left\{ (1 + K \cdot v_1 \cdot t)^2 - 1 \right\}, \quad (6)$$

де $t-$час,

$v_1 = v_0 \cdot \cos\theta_0$, $v_2 = v_0 \cdot \sin\theta_0 -$ проєкції вектора початкової швидкості тіла $\vec{v}_0$ на осі OX та OY, отже:

$$b = \frac{1}{2Kv_1} \cdot \left(v_2 + \frac{g}{2Kv_1} \right).$$

Для $v_x = \dot{x}(t)$ й $v_y = \dot{y}(t)$ з (5) та (6) маємо:

$$v_x = v_1 \cdot (1 + K \cdot v_1 \cdot t)^{-1}; \quad (7)$$

$$v_y = 2b \cdot K \cdot v_1 \cdot (1 + K \cdot v_1 \cdot t)^{-1} - - \frac{g \cdot (1 + K \cdot v_1 \cdot t)}{2K \cdot v_1}. \quad (8)$$

Оскільки залежності (5) та (6) визначають рівняння траєкторії руху матеріального тіла в параметричному виді $(x = x(t); y = y(t))$, тоді для пошуку рівняння траєкторії руху в явному виді, тобто як $y = y(x)$, варто скористатись таким співвідношенням:

$$y(x) = 2b \cdot K \cdot x - \frac{g}{(2K \cdot v_1)^2} \cdot [\exp(2Kx) - 1]. \quad (9)$$

Використовуючи розв'язки (5) та (6), створимо залежність $x = x(y)$ (тобто інверсію співвідношення (9)) за допомогою спеціальної функції Ламберта [1]. Введемо для цього позначення:

оскільки $z = -W_2(-\exp[-\varsigma])$, тоді

$$\xi^2 = \frac{g}{(2K \cdot v_1)^2 \cdot b} \cdot (1 + K \cdot v_1 \cdot t)^2;$$

$$\eta = \frac{1}{b} \cdot \left[-y + \frac{g}{(2K \cdot v_1)^2} \right] - - \ln\left[\frac{g}{(2K \cdot v_1)^2 \cdot b} \right]. \quad (10)$$

Тоді вираз (6) можна перетворити до форми

$$\ln \xi^2 - \xi^2 = -\eta = -\eta(y). \qquad (11)$$

Розв'язками рівняння (11) є такі:

$$\xi^2 = -W_1(-\exp(-\eta))$$

й (12)

$$\xi^2 = -W_2(-\exp(-\eta)),$$

де $W_1(\varsigma)$ – головна гілка; $W_2(\varsigma)$ – допоміжна гілка функції Ламберта [1], що табульована в цій роботі.

З огляду на (5) маємо:

$$x = x(y) = \frac{1}{2K} \times \times \ln\left\{-\frac{(2K \cdot v_1)^2 \cdot b}{g} \cdot W_1[-\exp(-\eta)]\right\}, \qquad (13)$$

якщо $x \le x_e$;

а також

$$x = x(y) = \frac{1}{2K} \times \times \ln\left\{-\frac{(2K \cdot v_1)^2 \cdot b}{g} \cdot W_2[-\exp(-\eta)]\right\}, \qquad (14)$$

якщо $x \ge x_e$.

До речі, у [1] наявні помилки (наприклад, у співвідношенні (14)), які в цьому дослідженні виправлені.

У точці максимуму (найвища вздовж осі OY точка траєкторії польоту, тобто $y = y_e$) для $x = x_e$ маємо:

$$x = x_e = \frac{1}{2K} \cdot \ln\left\{\frac{(2K \cdot v_1)^2 \cdot b}{g}\right\}. \qquad (15)$$

Зі співвідношень (13), (14) випливає компактна формула для обчислення горизонтальної дальності польоту $x_* > x_e$:

$$x_* = \frac{1}{2K} \times \times \ln\left\{-\frac{(2K \cdot v_1)^2 \cdot b}{g} \cdot W_2[-\exp(-\eta_*)]\right\}. \qquad (16)$$

Тут, у (16) введене таке позначення:

$$\eta_* = \frac{1}{b} \cdot \left[h + \frac{g}{(2K \cdot v_1)^2}\right] - \ln\left\{\frac{g}{(2K \cdot v_1)^2 \cdot b}\right\}; \qquad (17)$$

$h = -y_*$ – висота падіння матеріального тіла.

Розв'язок (5) можна використати й для ідентифікації коефіцієнта парусності K, але водночас необхідно виміряти тривалість (час) польоту частинки t_* на відстань x_*. Тоді з (5) маємо:

$$K \cdot x_* = \ln(1 + K \cdot v_1 \cdot t_*). \qquad (18)$$

Отже:

$$t_* = \frac{1}{K \cdot v_1} \cdot (exp(K \cdot x_*) - 1) \qquad (19)$$

якщо відомі параметри руху K, v_1, x_*.

Співвідношення (18) можна записати так:

$$\ln z - z = -\varsigma, \qquad (20)$$

де

$$z = \frac{x_*}{v_1 \cdot t_*} \cdot (1 + K \cdot v_1 \cdot t_*);$$

$$\varsigma = \frac{x_*}{v_1 \cdot t_*} - \ln\left(\frac{x_*}{v_1 \cdot t_*}\right). \qquad (21)$$

$$K = -\frac{1}{v_1 \cdot t_*} - \frac{1}{x_*} \cdot W_2(-\exp[-\varsigma]). \qquad (22)$$

Розглянемо приклади, які відтворюють особливості роботи пристрою для здійснення торкретробіт з бетонною сумішшю та розкидача мінеральних добрив.

Приклад 1. Задаємо початкову швидкість польоту середньої частинки бетонної суміші $v_0 = 20$ м/с за умови, що , $\theta_0 = 15^0$, та послідовно три значення коефіцієнта парусності: $K = 0{,}098$; 0,294; 0,98 м$^{-1}$.

Для них, якщо $h = 0$, отримаємо x_*, які зазначені в табл. 1. Таке визначення задачі необхідне для моделювання та аналізу польоту фракційної складової бетонних сумішей під час здійснення торкретробіт.

Таблиця 1 – Результати розрахунків фракційної складової бетонних сумішей з огляду на опір повітря

K, м$^{-1}$	b, м	η_*	$W_2[-\exp(-\eta_*)]$	x_*, м
0,098	2,049	1,432	-2,236	9,70
0,294	0,531	2,088	-3,250	5,31
0,980	0, 143	3,090	-4,650	2,33

Під час аналізу результатів розрахунків, наведених у Таблиці 1, було визначено, що в цьому випадку врахування опору повітря є доволі суттєвим.

Приклад 2. Частинки вилітають з розкидача мінеральних добрив так, що $v_1 = 4$ м/с; $v_2 = 1$ м/с. Визначимо за (16), як будуть відрізнятись дальності польоту двох частинок, якщо у першої $K = K_1 = 0{,}074$ м$^{-1}$, а у другої $K = K_2 = 0{,}136$ м$^{-1}$, водночас $h = 0{,}8$ м.

Результати розрахунків для зазначених вихідних даних подані в таблиці 2.

Таблиця 2 – Результати обчислення x_*, якщо $v_0 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = \sqrt{17}$, м/с

K, м$^{-1}$	b, м	η_*	$W_2[-\exp(-\eta_*)]$	x_*, м
0,074	29,681	1,029	-1,259	1,95
0,136	9,206	1,092	-1,492	1,86

Приклад 3. Використовуючи формулу (18), визначимо коефіцієнт парусності частинки, якщо $v_1 = 20 \cdot \cos 15^0 = 19{,}319$ м/с; $x_* = 9{,}70$ м; $t_* = 0{,}838$ с. Здійснивши розрахування, отримаємо:

$$\varsigma = 1{,}111;\ exp(-\varsigma) = 0{,}329;$$
$$W_2[-exp(-\varsigma)] = -1{,}550;$$

$K = 0{,}098$ м$^{-1}$, тобто отримали таке саме значення K, як і в попередньому прикладі.

Крім того, використовуючи співвідношення (9), можна легко знайти поточне значення кута нахилу (θ) дотичної до траєкторії руху частинки співвідносно горизонту, що дозволяє визначити θ для миттєвого значення швидкості руху v з горизонтальним напрямком:

$$tg\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = $$
$$= 2b \cdot K - \frac{g \cdot 2K}{(2Kv_1)^2} \cdot \exp(2Kx) = \tag{24}$$
$$= 2bK - \frac{g}{2K \cdot {v_1}^2} \cdot \exp(2Kx).$$

Тоді для θ маємо (з урахуванням (5)):

$$\theta = arctg\left\{2bK - \frac{g}{2K \cdot {v_1}^2} \cdot \exp(2Kx)\right\} =$$
$$= arctg\left\{2bK - \frac{g}{2k{v_1}^2} \cdot (1 + K \cdot v_1 \cdot t)^2\right\}. \tag{25}$$

Отже, кут $\overline{\overline{\theta}}$, який складає вектор миттєвої швидкості v руху частинки з горизонтом у кінцевий момент руху ($x = x_*$, $t = t_*$) дорівнює:

$$\overline{\overline{\theta}} = \theta\big|_{x=x_*} = \theta\big|_{t=t_*} =$$
$$= arctg\left\{2bK - \frac{g}{2K{v_1}^2} \cdot \exp(2Kx_*)\right\} = \tag{26}$$
$$= arctg\left\{2bK - \frac{g}{2K{v_1}^2} \cdot (1 + Kv_1 \cdot t_*)^2\right\}.$$

Оскільки у найвищій точці траєкторії руху частинки ($x = x_e$; $t = t_e$) кут $\theta = 0$, то можна знайти безпосередньо значення $x = x_e$ та $t = t_e$ з таких співвідношень:

$$x_e = \frac{1}{2K} \cdot \ln\left\{\frac{4b \cdot K^2 \cdot {v_1}^2}{g}\right\}; \tag{27}$$

$$t_e = \left(2K \cdot v_1 \cdot \sqrt{\frac{b}{g}} - 1\right) \cdot \frac{1}{K \cdot v_1}. \tag{28}$$

Висновки

Обґрунтовані фізико-механічна й математична моделі, які адекватно описують параметри й особливості руху матеріального тіла/частинки, що рухається вздовж пологої (настильної) траєкторії, коли враховані сили опору повітряного середовища, які пропорційні квадрату швидкості руху частинки. Для більш точного аналізу параметрів траєкторії руху використана спеціальна функція Ламберта, яка протабульована в [1] або може бути розрахована за допомогою ПЕОМ [10].

Отримані в роботі результати надалі можуть бути використані для вдосконалення й уточнення інженерних методів розрахування в задачах зовнішньої балістики матеріального тіла за умови врахування квадратичного (за швидкості руху) опору повітряного середовища, а також під час проєктування й конструювання обладнання, призначеного для торкретробіт, пневмосепарування зернових сумішей у сільськогосподарському виробництві, дослідження динаміки частинок розпилених струменів у процесі пожежогасіння, зрошування рослин, розкидання мінеральних добрив (сільськогосподарське виробництво), у розрахунках перенесення дрібнодисперсних частинок повітряними потоками в екології тощо.

Література

1. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. On the Lambert W function. Adv. Comput. Math. 1996. Vol. м5. P. 329–359.
2. Теоретична механіка: зб. задач: навч. посіб. для студентів вузів / М. А. Павловський та ін. Київ: Техніка, 2007. 400 с.
3. Теоретична механіка: навчальний посібник / С.І. Кучеренко та ін. Харків: ХНТУСГ, 2012. 568 с.
4. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Інверсія розв'язку Дідіона в задачі балістики матеріальної точки: теоретичні та прикладні проблеми фізики. Наукові вісті НТУУ «КПІ». 2013. № 4. С. 145–147.
5. Балістика крапель, які випаровуються при польоті / В. П. Ольшанський та ін. Харків: ХНТУСГ, 2007. 304 с.
6. Заїка П. М. Теорія сільськогосподарських машин для приготування та внесення добрив. Харків: Око, 2002. 342 с.
7. Заїка П. М. Теорія сільськогосподарських машин. Зернозбиральні машини. Харків: Око, 2004. 402 с.
8. Запольський Л. Л. Моделювання траєкторії доставки засобів пожежегасіння методом метання. Геометричне та комп'ютерне моделювання. 2004. Вип. 5. С. 106–113.
9. Ловейкін В. С., Човнюк Ю. В., Дитюк А. І. Дослідження дальності польоту частинок твердих мінеральних добрив шляхом моделювання. Конструювання. виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. 2009. Вип. 39. С. 82–90.
10. Спеціалізований програмний калькулятор для обчислення значень функції Ламберта $W_0(X)$ і споріднених з нею функцій / С. В. Гадецька та ін. Системи обробки інформації. 2020. Випуск 3. (162). С. 21–35.

References

1. Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. On the Lambert W function. Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5. P. 329–359.
2. Pavlovsky, M. A., Apostoliuk, O. S., Vorobyov, V. M., Ilchyshina, D. I. Teoretychna mekhanika: zb. zadach: navch. posib. dlya studentiv vuziv [theoretical mechanics: coll. tasks: teaching manual for university students. Kyiv: Technika, 2007. 400 p. [in Ukrainian].
3. Kucherenko, S. I., Burlaka, V. V., Tishchenko, L. M. Teoretichna mekhanika [Theoretical mechanics]. *Navchalniy posibnik*. Kharkiv: KHNTUSG, 2012. 568 s. [in Ukrainian].
4. Olshanskyi, V. P., Olshanskyi, S. V. Inversiya rozv″yazku Didiona v zadachi balistyky materialnoyi tochky [Inversion of the Didion solution in the problem of ballistics of a material point], theoretical and applied problems of physics. Scientific news of NTUU "KPI". Kyiv. 2013 / 4. P. 145–147.
5. Balistika krapel, yaki viparovuyutsya pri poloti [Ballistics of droplets that evaporate during flight] /za redaktsieyu V. P. Olshanskogo. Kharkiv: KHNTUSG, 2007. 304 s. [in Ukrainian].
6. Zaika, P. M. Teoriya silskogospodarskikh mashin dlya prigotuvannya ta vnesennya dobriv [Theory of agricultural machines for preparing and applying fertilizers]. Kharkiv: Oko, 2002. 342 s. [in Ukrainian].
7. Zaika, P. M. Teoríya silskogospodarskikh mashin. Zernozbiralní mashini [Theory of agricultural machines for preparing and applying fertilizers]. Kharkiv: Oko, 2004. 402 s. [in Ukrainian].
8. Zapolskiy, L. L. Modelyuvannya traektorii dostavki zasobiv pozhezhegasinnya metodom metannya [Modeling the trajectory of the delivery of fire extinguishing agents by the throwing method]. Geometrichne ta kompyuterne modelyuvannya. Kharkiv: KHDUKHT, 2004. Vip. 5. S. 106–113. [in Ukrainian].
9. Loveykin, V. S., Chovnyuk, YU. V., Dityuk, A. I. Doslidzhennya dalnosti polotu chastinok tverdikh mineralnikh dobriv shlyakhom modelyuvannya [Study of the flight range of particles of solid mineral fertilizers by means of simulation. Designing. production and operation of agricultural machines]. *Konstruyuvannya. virobnitstvo ta yekspluata-tsiya silisikogospodarsikikh mashin.* 2009. Vip. 39. S. 82–90 [in Ukrainian].
10. Hadetska, S. V., Dubnytskyi, V. Yu., Kushneruk, Yu. I., Khodyrev, O. I., Shevyakov, Y. I. Spetsiali-zovanyy prohramnyy kal′kulyator dlya obchys-lennya znachen′ funktsiyi Lamberta W0(X) i spo-ridnenykh z neyu funktsiy [Specialized software calculator for calculating the values of the Lambert function W0(X) ad functions related to it]. Information processing systems. 2020. Issue 3 (162). P. 21–35.

Задорожний Андрій Олексійович[1]**,** к.т.н, доц. zsnj1971@ukr.net
orcid.org/0000-0002-1031-0585
тел. +38 066 931 28 78
Стаховський Олег Валерійович,[2] д.т.н., проф. dr.stahman@gmail.com
orcid.org/0000-0002-9808-6302
тел. +38 050 254 75 28
Човнюк Юрій Васильович[3], к.т.н., доц. ychovnyuk@ukr.net
orcid.org/0000-0002-0608-0203
тел. +38 096 570 45 65
Бугаєвський Сергій Олександрович[4]**,** д.т.н., проф. bugaevskiysa@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2861-0268
тел. +38 050 937 90 16

[1] Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна
[2] Національний університет оборони, м. Київ, Україна
[3] Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна
[4] Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків, Україна

Application of the Lambert function in the analytical solution of ballistics problems for flat flight trajectories of a material body, taking into account the gaseous (air) medium

Annotation. *The paper describes the use of a special Lambert function for solving problems of ballistics of a material body, when the resistance of a gaseous (air) medium is taken into account. A model of quadratic (based on the speed of movement of a body) resistance of the medium within the limits of an approaching flat trajectory is considered.*
Problem. *Problems of ballistics of a material body are considered in courses of theoretical mechanics, as well as in specialized literature. But, in addition to the cited literature, this research, like [4], for unraveling the simplified level of the material body in the problems of ballistics for flat trajectories of the power of a special function Lambert, which allows us to essentially simplify the algorithm for developing the parameters of the trajectory of a gentle slope (floor) type.* ***Goal.*** *The goal of the work is based on a framed model of a material body for flat trajectories in problems of modern ballistics on this basis, using a special Lambert function, to be controlled by a visible decoupling Didion, the determination of the main parameters of these types of crash trajectories.* ***Methodology.*** *Physic, mechanical and mathematical models are constructed that adequately describe the parameters of the collapse of a material body/particle that collapses along a flat trajectory when the wind is not supported , which are proportional to the square of the fluidity of the particles. For a more manual description of the parameters of the trajectory of the motion, there is a special Lambert function, which is tabulated in [1], or can be expanded with the help of computer in the middle of "Maple 8".* ***Practical value.*** *The results obtained in the work can be used to improve and clarify engineering methods of calculation in problems of external ballistics of a material body, taking into account the quadratic (in terms of movement speed) resistance of the air environment.*
Key words: *analytical approach, solution, simplification of the equation of motion, material body, air environment, ballistics, drag quadratic in terms of the speed of movement, problems of external ballistics, flat trajectories of movement.*

Zadorozhnyi Andriy Oleksiyovych[1]**,** Associate Professor, PhD. ORCID: 0000-0002-1031-0585, zsnj1971@ukr.net
tel. +38 066 931 28 78
Stakhovsky Oleg Valeriyovych[2]**,** Professor, Doctor of Technical Sciences, ORCID: 0000-0002-9808-6302
dr.stahman@gmail.com
tel. +38 050 254 75 28
Chovnyuk Yuriy Vasyliovych[3] Associate Professor, Ph.D.ORCID:0000-0002-0608-0203,
ychovnyuk@ukr.net
tel. +38 096 570 45 65
Buhaievskyi Sergiy Oleksandrovych[4]**,** Professor, Doctor of Technical Sciences, ORCID: 0000-0003-2861-0268
bugaevskiysa@gmail.com
tel. +38 050 937 90 16

[1]Military Institute of Tank Troops of the National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine,
[2]National Defense University, Kyiv, Ukraine,
[3]Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine,
[4] Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine.