

МАТРИЧНІ МЕТОДИ ТА ВИКЛАДАННЯ ОСНОВ МЕХАНІКИ РІДИНИ Й ГАЗУ В ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Біловол О. В.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. Використання універсальних законів природи як основи та матричного формалізму як методу отримання принципів механіки дозволяє застосувати відмінні від традиційних підходи до методики викладання основних понять, концепцій і принципів механіки рідини й газу. Запропонований підхід використовує модель суцільного середовища, але враховує його внутрішню динаміку через процедуру згортання багатовимірного фазового простору.

Ключові слова: методика викладання механіки рідини й газу, рівняння балансу кількості руху, матричні методи, канонічні рівняння.

Вступ

Розвиток сучасних підходів до викладання фізико-математичних дисциплін у закладах вищої освіти має певні принципові тенденції. Вони тяжіють до підвищення рівня формалізації, що, по-перше, є важливим чинником для формулювання й отримання загальних законів з універсальних законів природи; по-друге, дозволяють застосування спільних підходів до синтезу складних механізмів і процесів, які мають різну фізичну основу; по-третє, органічно поєднують наукову й інженерну діяльність майбутніх фахівців, що має безпосередній зв'язок з використанням комп'ютерних технологій і штучного інтелекту.

Формалізація передбачає використання й вдосконалення матричних методів, які є необхідним елементом математичного моделювання фізичних явищ у багатовимірних або навіть нескінченновимірних просторах. За допомогою матричних методів підвищується рівень абстрактного мислення.

Під час вивчення механіки рідини й газу в технічних закладах вищої освіти переважно використовують моделі суцільного середовища з використанням звичних класичних понять кількості руху, сили та напруження, які записуються у векторному і тензорному вигляді. Такий підхід з формально математичного погляду не враховує особливості молекулярної будови середовища. Кінетична теорія, яка побудована на теорії ймовірностей та математичній статистиці, складніша для сприйняття й обмежує використання матричних методів. У роботі пропонується враховувати молекулярну будову середовища через згортання багатовимірного фазового простору механічної системи, якою є час-

тка середовища, у фазовий простір частки як матеріальної точки.

У процесі отримання рівнянь руху рідини й газу з канонічних рівнянь механіки, а також рівнянь балансу кількості руху основою є універсальний закон збереження матерії, який поширюється на субстанції в абстрактних багатовимірних просторах без обмежень на їхні властивості.

Підвищення рівня абстракції у зв'язку з розвитком фізико-математичних методів, рівня їхнього викладання в технічних закладах вищої освіти на сьогодні є більше перевагою, ніж недоліком через застосування математичного моделювання для розв'язання складних інженерних задач. Абстрактні образи фізичних процесів є спільною рисою людського та штучного інтелектів, усвідомлення цього підвищує ефективність використання останнього. Важливим елементом взаємодії зі штучним інтелектом є матричний формалізм як мова образів.

Аналіз публікацій

Загальноприйнятий підхід до викладання механіки рідини й газу в технічних закладах вищої освіти передбачає використання різноманітних інтегральних (рівняння балансу певної субстанції у фізичному тривимірному просторі) та диференціальних принципів механіки [4, 6].

Як основу використовують модель суцільного середовища, яка не враховує внутрішню мікроскопічну будову його окремих часток. Здійснення векторного та тензорного аналізів дозволяє отримати інваріантне рівняння руху [1, 3]. Вплив мікроскопічних факторів враховується використанням емпіричних або напівемпіричних формул.

Існує можливість перейти від дискретної моделі систем матеріальних точок, в якій здебільшого використовуються багатовимірні системи координат (простір конфігурацій і фазовий простір), до моделі суцільного середовища у вигляді, наприклад, абстрактної фазової рідини. Функцію розподілу вірогідності пошуку системи в певній області відповідного простору через відсутність обмежень на кількість таких систем можна розглядати як густину цієї рідини [2,5].

Універсальні закони природи, зокрема закон збереження матерії, можна використовувати в абстрактних просторах для аналізу руху суцільного середовища без обмежень на його властивості та на вибір субстанції як різновиду матерії [1].

Використання матричного апарату дозволяє здійснити процедуру згортання багатовимірного простору в тривимірний фізичний простір і визначити механізми впливу внутрішньої динаміки частки середовища на її макроскопічний рух [2].

Мета та постановка завдання

Мета цього дослідження полягає у вивченні й обґрунтуванні переваг матричних методів для отримання рівнянь руху рідини й газу з канонічних рівнянь механіки через використання моделі суцільного середовища у фазовому та фізичному просторах. Дослідження спрямоване на демонстрацію зв'язку між внутрішнім мікроскопічним і макроскопічним рухом рідин і газів, а також визначення можливостей матричного формалізму щодо моделювання та використання комп'ютерних засобів.

Методологічною основою для вибору матричних методів є застосування тензорного аналізу та його узагальнень для моделювання руху рідин і газів у фізичному та фазовому просторах.

Основним завданням є застосування матричного формалізму для отримання системи рівнянь руху рідини й газу з канонічних рівнянь механіки та закону збереження матерії, тобто рівнянь балансу кількості руху. Рівняння балансу, яке містить густину субстанції f в об'ємі частки середовища V , потік субстанції \mathbf{F} вздовж поверхні частки S , а також інтенсивність джерела субстанції j , може розглядатися в різних контекстах, залежно від вибору простору та характеристик середовища:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V f dV \right) = \int_S \mathbf{F} d\mathbf{S} + \int_V j dV.$$

Ліва частина рівняння визначає швидкість зміни кількості певної субстанції в об'ємі частки середовища. Ця зміна відбувається внаслідок притоку субстанції через спільну границю об'єму та зовнішнього оточення або надходження з внутрішніх джерел. Конкретний зміст потоку й інтенсивності джерела враховує фізичні особливості моделі й інваріантний тип рівнянь.

Матричний формалізм і рівняння руху суцільного середовища

Скористаємося перевагами моделі суцільного середовища. Традиційно поділимо середовище на нескінченно малі об'єми, але будемо мати на увазі, що кожна така частка складається з матеріальних точок (молекул). Зв'язок між положеннями часток середовища та матеріальними точками, з яких вони складаються, можна записати так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t),$$

де \mathbf{r} – радіус-вектор у просторі конфігурацій системи точок, а \mathbf{q} – радіус-вектор центра мас частки.

Величина часу наявна у формулі через статистичні флуктуації (випадкові відхилення) положень окремих точок системи.

Узагальнений імпульс частки можна записати як

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}',$$

де матриця

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} = m\mathbf{I} + \mathbf{G}'.$$

Складова $m\mathbf{I}$, де \mathbf{I} – одинична матриця, що відповідає руху частки як єдиного цілого, а складова \mathbf{G}' відповідає її внутрішньому руху, тобто руху матеріальних точок у супутній системі координат, пов'язаній із центром мас. Через невелику частку останньої складової ми не будемо її використовувати.

Складова узагальненого імпульсу частки, яка враховує статистичні відхилення в русі матеріальних точок, визначається за формулою

$$\mathbf{p}' = m\mathbf{u}'.$$

Відносна швидкість

$$\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\mathbf{M}}{m} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Рівняння руху частки густиною ρ у просторі конфігурацій можна отримати безпосередньо з канонічних рівнянь механіки

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Функція Гамільтона складається з кінетичної і потенціальної енергії частки і має такий загальний вигляд:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{a})\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) + mV(\mathbf{q}, t).$$

Після внесення відповідних величин отримуємо рівняння

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = -\rho \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - \rho \dot{\mathbf{u}}',$$

де $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$ – швидкість частки, а V – питомий (з розрахунку на одиницю маси) потенціал.

Якщо вважати потенціал скалярним полем $V = V(\mathbf{r})$, а швидкість часток середовища векторним полем $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, то останнє стає рівнянням руху середовища.

Густина як джерело гравітації

Скалярний потенціал V можна вважати фундаментальним, бо він з'являється природним способом під час отримання рівнянь руху. Варто зазначити, що у випадку суцільного середовища функцію ознаки матеріальності здійснює густина ρ , вона на відміну від нескінченно малої маси часток є кінцевою величиною і підпорядковується рівнянню нерозривності, яке виражає закон збереження маси як диференціальне:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u} = 0.$$

Відповідно до цього густину можна вважати зарядом або джерелом фундаментальної взаємодії, тобто

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{F} - 4\pi f \rho = 0,$$

де вектор потоку, який можна утворити за допомогою градієнта, є питомою силою:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}.$$

Таким чином, якщо точка знаходиться в середовищі, гравітаційний потенціал задовольняє рівнянню Пуассона:

$$\Delta V - 4\pi f \rho = 0,$$

де $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)^2$ – оператор Лапласа, а f – певна фундаментальна стала. Відповідно до рівняння, ця стала є гравітаційною.

Матричний формалізм і рівняння балансу кількості руху суцільного середовища

Розглянемо рівняння балансу кількості руху суцільного середовища з огляду на рівняння нерозривності:

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P} + \mathbf{j},$$

де потік кількості руху \mathbf{P} називається тензором напружень.

Якщо порівняти праві частини рівнянь балансу кількості руху та рівняння руху середовища, то стає зрозумілим, що інтенсивність джерела

$$\mathbf{j} = -\rho \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}},$$

а дивергенція тензора напружень або приплив кількості руху до частки суцільного середовища здійснюється через зміну функції розподілу статистичних відхилень і, відповідно, кількості співвідносного руху на мікроскопічному рівні:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P} = \rho \dot{\mathbf{u}}'.$$

Тензор напружень має підпорядковуватися умовам коваріантності та складатися з добутку скаляра на тензор і тензорного добутку двох векторів.

Будемо вважати ізотропне середовище ідеальним, якщо тензор напружень визначається через одиничний тензор, тобто

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I},$$

де p – скалярна функція, що має розмірність сили, яка діє на одиницю площі. Такі величини називають напруженнями, а сили, які вони визначають, поверхневими. Отже, отримуємо рівняння руху ідеальної рідини:

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = -\rho \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}.$$

Крім того, за формулою Гауса-Остроградського отримуємо рівняння

$$-\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\iint (-p) d\mathbf{S}}{v},$$

де v – об'єм частки. Інтеграл вздовж поверхні частки можна розглядати як рівнодіючу сил тиску, спрямованих вздовж нормалі до поверхні, а ліву частину рівняння як рівнодіючу, що діє на одиницю об'єму середовища.

Дотичні напруження так само пов'язані з нерівномірністю розподілу швидкостей, тобто тензор напружень повинен мати складову, що залежить від вектора швидкості та вектора градієнта. Найбільш загальний вид цього зв'язку відповідає узагальненому закону Ньютона:

$$\mathbf{P} = \left(-p + \zeta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u} \right) \mathbf{I} + \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}},$$

де μ – динамічний коефіцієнт в'язкості, а ζ – коефіцієнт об'ємної в'язкості.

Отже, рівняння руху реального (в'язкого) середовища можна записати так:

$$\dot{\mathbf{u}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \mathbf{u} + \eta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u} \right),$$

де кінематичний коефіцієнт в'язкості

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

а кінематичний коефіцієнт об'ємної в'язкості

$$\nu = \frac{\mu + \zeta}{\rho}.$$

Висновки

Визначено, що матричний метод, який у попередніх роботах [1, 2, 3] був застосований до класичної і релятивістської механіки, дозволяє врахувати молекулярну будову середовища через згортання багатомірного фазового простору механічної системи, якою є частка середовища, і скористатись цим для отримання рівнянь руху рідини й газу з канонічних рівнянь класичної механіки та рівнянь балансу кількості руху середовища.

Поєднання канонічних рівнянь як результату застосування закону збереження матерії у вигляді рівняння балансу у фазовому просторі та рівняння балансу кількості руху у фізичному просторі дозволяє визначити зв'язок між макроскопічним і мікроскопічним рухами середовища, а також математичну структуру рівнянь руху рідини й газу.

Запропонований метод дозволяє в межах стандартної для технічних закладів вищої освіти математичної підготовки ефективно формалізувати рівняння руху рідини й газу та записати їх як інваріантні. З огляду на інваріантність можна отримати як фундаментальні закони (закон все-світнього тяжіння), так і часткові (узагальнений закон Ньютона).

Література

1. Біловол О. В. Закони механіки і універсальні закони природи. Вісник Харківського автомобільно-дорожнього університету: сб. наук. тр. Харків: ХНАДУ, 2013. Вип. 60. С. 148–153.
2. Біловол О. В. Переваги використання матричних методів у викладанні механіки закладами вищої освіти. Вісник ХНАДУ. 2023. № 101.
3. Біловол О. В. Використання матричних методів у викладанні електродинаміки закладами вищої освіти, переваги і перспективи. Вісник ХНАДУ. 2024. Том 1. № 104.
4. Єжов С. М., Макарець М. В., Романенко О. В. Класична механіка. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. 480 с.
5. Іро Г. Класична механіка. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 1999. 464 с.
6. Біловол О. В. Сучасна фізика як новітня натуральна філософія. Харків: ФОП Панов А. М., 2019. 116 с.

References

1. Belovol A. V. Zakony mehaniki i universalnye zakony prirody. Vestnik Harkovskogo avtomobilno-dorozhnogo universiteta: sb. nauch. tr. Harkov: HNADU, 2013. Vyp. 60. S. 148–153.
2. Bilovol O. V. Perevahy vykorystannia matrychnykh metodiv u vykladanni mekhaniky zakladamy vyshchoi osvity. Visnyk KhNADU. 2023. № 101.
3. Bilovol O. V. Vykorystannia matry-chnykh metodiv u vykladanni elektrody-namiky zakladamy vyshchoi osvity, pere-vahy i perspektyvy. Visnyk KhNADU. 2024. Tom 1. № 104.
4. Yezhov S. M., Makarets M. V., Romanenko O. V. Classical mechanics. Kyiv: VOC "Kyiv University", 2008. 480 p.
5. Iro G. Classical mechanics. Lviv: LNU named after Ivan Franko, 1999. 464 p.
6. Bilovol O. V. Suchasna fizika yak novitnya naturalna filozofiya. Harkiv: FOP Panov A. M., 2019. 116 s.

Біловол Олександр Васильович, к.т.н., доц. каф. деталей машин та теорії машин і механізмів, тел. +38 095-537-17-74, avbelovol58@gmail.com, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, 61002, Україна.

Matrix methods and teaching the fundamentals of fluid and gas mechanics in higher education institutions

Abstract. Problem. The instruction of physical and mathematical disciplines in higher education institutions employing cutting-edge methods and universal approaches, which seamlessly integrate scientific and engineering activities of future specialists, remains one of the pertinent and priority tasks. The utilization of multidimensional or even infinite-dimensional spaces has become an effective and nearly indispensable tool in mathematical modeling of physical phenomena. This circumstance is directly linked to the increasing level of abstraction and the refinement of mathematical methods. The use of geometric methods inherent in vector algebra and vector analysis as the foundation for studying mechanics, despite their illustrative nature, is losing its relevance. Methods built upon matrix formalism are evolving as substitutes. The matrix framework enables the exploitation of phase space advantages to derive canonical equations of motion for continuous media and electromagnetic field equations in covariant forms. The electromagnetic potential acquires mechanical significance, allowing the utilization of

electromechanical analogies at a fundamental level rather than on a merely formal basis, as done in classical electrodynamics. **Goal.** The aim of this research is to study and justify the advantages of matrix methods for deriving equations of motion for fluids and gases from the canonical equations of mechanics by utilizing a continuum model in phase and physical space. The research is directed towards demonstrating the connection between the internal microscopic and macroscopic motion of fluids and gases, as well as highlighting the potential of matrix formalism both in terms of modeling and the utilization of computational tools. **Methodology.** The methodological basis for selecting matrix methods lies in the application of tensor analysis and its generalizations for modeling the motion of fluids and gases in physical and phase space. **Results.** It has been demonstrated that the matrix method, previously applied to classical and relativistic mechanics, allows for the consideration of the molecular structure of the environment by folding the multidimensional phase space of the mechanical system, represented by a particle of the medium, and thereby deriving equations of motion for fluids and gases from the canonical equations of classical mechanics and the equations of momentum balance of the medium. **Originality.** The combination of canonical equations as a result of applying the conservation law of matter in the form of balance equations in phase space and momentum balance equations in physical space allows for elucidating the relationship between macroscopic and microscopic motions of the medium, as well as the mathematical structure of the equations of motion for fluids and gases. **Practical value.** The proposed method allows, while remaining within the standard mathematical training offered by technical educational institutions, to effectively formalize the equations of motion for fluids and gases and provide them with an invariant form. By guiding oneself through invariance, both fundamental laws (such as the law of universal gravitation) and partial laws (the generalized Newton's law) can be obtained. **Key words:** method of teaching liquid and gas mechanics, equations of motion balance, matrix methods, canonical equations.

Belovol Oleksandr, Ph.D., Assoc. Prof., Department of Machine Components and Theory of Mechanisms and Machines, tel. +38 095-537-17-74, avbelovol58@gmail.com, Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.