УДК 531/534(075.8) DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2024.104.0.146

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНИХ МЕТОДІВ ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ В ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ: ПЕРЕВАГИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

Біловол О. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Викладання основних понять, концепцій, принципів електродинаміки в закладах вищої технічної освіти здійснюється згідно з принципом наступності «від простого до складного», що з методологічної точки зору є продовженням курсу фізики середньої школи й певною мірою нагадує історію розвитку електродинаміки. Сучасні тенденції у науковій та інженерній сферах вимагають застосування багатовимірних просторів, зокрема конфігураційних і фазових, тензорної алгебри та комп'ютерних технологій у моделюванні складних електромеханічних систем. Цей напрям передбачає відмову від традиційних геометричних методів, що ґрунтуються на векторній алгебрі та векторному аналізі, оскільки вони є недостатньо ефективними для аналізу складних структур і явищ, які визначаються великою кількістю взаємозалежних параметрів і нелінійних взаємодій. Як основа вивчення електродинаміки вони не є актуальними, на відміну від аналітичних (координатних) методів, що побудовані на матричному формалізмі. Застосування матричного принципу дозволяє отримати основні рівняння електродинаміки для розв'язання практичних задач.*

Ключові слова: *методика викладання електродинаміки, релятивістська механіка, матричні методи, канонічні рівняння, фазовий простір.*

Вступ

Викладання фізико-математичних дисциплін у закладах вищої освіти із застосуванням найсучасніших методів й універсальних підходів, які поєднують наукову й інженерну діяльність майбутніх фахівців, є одним із актуальних і пріоритетних завдань.

Використання багатовимірних або навіть нескінченновимірних просторів стає ефективним і майже необхідним інструментом математичного моделювання фізичних явищ. Ця обставина безпосередньо впливає на підвищення рівня абстракції та вдосконалення математичних методів [2].

Розвиток фізико-математичних методів, підвищення рівня викладання в технічних закладах вищої освіти, застосування математичного моделювання для розв'язання інженерних задач призвели до необхідності розглядати фізичні процеси не в фізичному тривимірному просторі, який містить матеріальні тіла, а в багатовимірних або навіть нескінченновимірних просторах [3]. Обмеження на швидкість поширення взаємодії призвело до використання концепції простору-часу, а використання узагальнених координат дозволило розглядати рух системи у просторі конфігурацій. [5].

У зв'язку з цим використання геометричних методів векторної алгебри та векторного аналізу, які стали основою вивчення механіки втрачає свою актуальність, а замість цього розвиваються методи, засновані на матричному формалізмі. Використання матричного підходу дозволяє використовувати переваги застосування фазового простору для отримання канонічних рівнянь руху суцільного середовища та рівнянь електромагнітного поля в коваріантному перетворенні. Потенціал електромагнітного поля набуває механічного змісту, що дозволяє використовувати електромеханічну аналогію на фундаментальному рівні, а не на формальній основі, як в класичній електродинаміці.

Актуальність й ефективність матричних методів підтверджує багаторічний досвід викладання фізичних дисциплін.

Аналіз публікацій

Класичний підхід до викладання електродинаміки передбачає використання різноманітних інтегральних і диференціальних принципів. Всі вони є проявом певного універсального закону, який можна розглянути як математичну формалізацію. Таким законом є закон збереження матерії, який можна записати як рівняння балансу певної субстанції [4, 6].

Під час аналізу руху систем матеріальних точок здебільшого використовуються абстрактні багатовимірні системи координат, що утворюють простір конфігурацій і фазовий простір та за своїми властивостями подібні до декартової системи координат. Розмірність простору дорівнює кількості незалежних координат кожним положенням або станом системи. Найбільш поширений спосіб аналізу складних систем базується на ймовірнісному підході. Функцію розподілу вірогідності пошуку системи в певній області відповідного простору через відсутність обмежень на кількість таких систем можна розглядати як густину певної абстрактної рідини, наприклад фазової [2, 5].

Універсальні закони природознавства, зокрема закон збереження матерії, використовують в абстрактних просторах для аналізу руху суцільного середовища без обмежень на його властивості та на вибір субстанції як різновиду матерії [1].

Розповсюдження матричного апарату на багатовимірні простори дозволяє об'єднати механічні та електромагнітні явища на фундаментальному рівні. Це сприяє використанню електромеханічних аналогій та покращенню техніки розрахунків.

Мета та постановка завдання

Мета цього дослідження полягає в розширенні сфери застосування матричного формалізму на нескінченновимірні простори. Дослідження спрямоване на обґрунтування переваг матричного підходу під час порівняльного аналізу методів, що використовуються в процесі вивчення основ електродинаміки, та демонстрацію його можливостей щодо моделювання та використання комп'ютерних засобів.

Методологічною основою для вибору матричних методів є застосування методів математичної статистики для моделювання руху електромеханічних систем у псевдоевклідовому просторі-часі. Крім того, електричні явища розглядаються особливості механічного руху в просторі-часі. Такий підхід дозволяє використовувати метод аналогій для інтерпретації та розуміння найбільш абстрактних рівнянь.

Основним завданням є аналіз застосування матричного формалізму для отримання замкненої системи рівнянь електродинаміки з закону збереження матерії у вигляді рівнянь балансу певних субстанцій (фізичних величин). Через відсутність обмежень під час вибору простору, в якому розглядаються рівняння балансу, можна використовувати навіть нескінченновимірні простори. Також немає обмежень у виборі субстанції та властивостей середовища. Рівняння балансу, яке містить густину субстанції f в об'ємі частки середовища V, потік субстанції F крізь поверхню частки S, а також інтенсивність джерела j, може бути адаптоване до різних умов та контекстів з огляду на вибір відповідного простору та характеристик середовища:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V f dV\right) = \int_S \mathbf{F} d\mathbf{S} + \int_V j dV.$$

Через специфіку кожного випадку важливо враховувати, що ліва частина рівняння визначає швидкість зміни кількості певної субстанції в об'ємі частки середовища. Ця зміна відбувається внаслідок її притоку через границі об'єму з зовнішнім оточенням або надходження з внутрішніх джерел. Потік й інтенсивність джерела можуть розглядатись як функції потенціалів полів, зокрема у цьому випадку як функції потенціалу електромагнітного поля.

Матричний формалізм і рівняння руху суцільного середовища

Розглянемо рух системи матеріальних точок у просторі-часі як рух суцільного середовища. Для цього необхідно поділити середовище на нескінченно малі об'єми, кожному з яких відповідатиме точка з координатами, що утворюють вектор q. Варто зазначити, що існує зв'язок між положеннями часток середовища та матеріальними точками, з яких вони складаються:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}).$$

Інтервал між найближчими послідовними положеннями частки середовища в просторі-часі можна записати як формулу

$$dl^2 = d\mathbf{r}\mathbf{M}d\mathbf{r} = d\mathbf{q}\mathbf{G}d\mathbf{q}\,.$$

Диференціали $d\mathbf{r}$ і $d\mathbf{q}$ у контексті векторного аналізу та диференціальних форм можуть бути розглянуті як рядки, якщо вони з'являються у формулі ліворуч, або як стовпчики, якщо вони розташовані праворуч. Така інтерпретація відповідає уявленню про напрямок та величину зміни змінних у конкретній точці простору.

Діагональна нескінченновимірна матриця $\mathbf{M}$ складається з блоків $dm\mathbf{I}'$, де dm – маса матеріальної точки у власній системі координат (маса спокою):

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Метричний тензор простору конфігурацій частки записуємо як

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}} \boldsymbol{M} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}},$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ – матриця перетворення.

Оскільки інтервал між двома подіями утворює абсолютний скаляр, визначимо інший абсолютний скаляр τ за формулою

$$d\tau^2 = \frac{dl^2}{mc^2},$$

де $d\tau$ можна розглядати, як нескінченно малий інтервал власного часу частки, якщо c є швидкістю світла, а m – масою частки.

Отже швидкості матеріальних точок, що належать до складу частки середовища, і швидкості самої частки будуть пов'язані так:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Інтервал у фазовому просторі частки

$$ds^2 = d\mathbf{q}d\mathbf{p},$$

де стовпчик імпульсів частки

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}.$$

Радіус-вектор $\mathbf{x}$ у фазовому просторі можна розглядати як стовпчик, що спочатку складається з послідовно розташованих координат, а потім з імпульсів точок. Тоді інтервал можна визначити за формулою

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{E}d\mathbf{x},$$

де матриця $\mathbf{E}$ утворюється з нульових й одиничних матриць, тобто

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Через принципову неможливість точного визначення стану механічної системи необхідно розглядати її рух як рух фазової рідини. Фазова рідина в цьому контексті є абстракцією, яка дозволяє моделювати рух системи та її компонентів з огляду на неозначеність та непередбачуваність її стану.

Розглянемо рівняння балансу для радіус-вектора частки фазової рідини:

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H} + \mathbf{b}.$$

Це рівняння визначає, як змінюється радіус-вектор кожної частки у фазовому просторі протягом деякого часу. Фазовий простір у цьому контексті є абстрактним простором, в якому кожна точка відповідає певному стану системи або її частини.

З огляду на консервативний тип системи, тобто нестисливість фазової рідини, та однорідність фазового простору, який демонструє, що система не має особливих точок, які б могли бути джерелами, отримуємо рівняння

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H},$$

де матриця $\mathbf{H}$ є антисиметричною.
Отже:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = 0.$$

Для утворення скаляра

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(ds^2\right) = d\dot{\mathbf{x}}\mathbf{E}d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{H}\mathbf{E}d\mathbf{x}$$

матриця $\mathbf{HE}$ має бути діагональною, а матриця $\mathbf{H}$ повинна мати клітинну структуру:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{D}$ – діагональна матриця.

Оскільки рівняння руху не має залежати від порядку координат, елементи матриці $\mathbf{D}$ і, а отже, і матриці H мають бути однаковими. Система механічних рівнянь руху має бути коваріантною, тобто не змінюватися в разі зміни системи координат.

Таким чином, ми можемо записати рівняння руху:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},$$

де H – елемент матриці $\mathbf{H}$, а матриця

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Спроєктувавши рівняння руху на простір конфігурацій і на простір імпульсів, отримаємо рівняння Гамільтона. Воно визначає зміну координат та імпульсів у часі для системи з гамільтоніаном H:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

З цих формул можемо отримати загальний вид функції Гамільтона H:

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{p}.$$

Матричний формалізм й електромагнітне поле

У своїх розрахунках ми використовували власний час частки середовища, який враховував її внутрішню динаміку, тобто динаміку матеріальних точок, з яких складається частка, у просторі конфігурацій. Але це суперечить моделі суцільного середовища. Отже, можна не розглядати внутрішню будову матерії і скористатись інваріантним часом у власній системі координат частки:

$$d\tau^2 = \frac{d\mathbf{q}\mathbf{I}'d\mathbf{q}}{c^2}.$$

Використання інваріантного часу у власній системі координат частки еквівалентне переходу до іншої системи координат. Рівняння Гамільтона не зміниться, а зміниться лише формула для імпульсу:

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

де друга складова є переносною кількістю руху, вектор $\mathbf{A}$ є переносною швидкістю, а коефіцієнт пропорційності є зведеною масою частки, яка враховує зміни маси окремих матеріальних точок й енергію їх взаємодії. Вектор $\mathbf{A}$ є потенціалом електромагнітного поля, а e електричним зарядом частки (розмірна константа наявна через використання гаусової системи вимірювання поля).

Запишемо функцію Гамільтона:

$$H = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{G}^{-1}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right).$$

Підставивши функції Гамільтона до рівняння руху частки, розділимо його на інваріантний об'єм частки υ. Отримані рівняння визначають рух матерії зі швидкістю $\mathbf{u}$ в просторі-часі. Відповідно до формули Ейлера швидкість є функцію радіус-вектора $\mathbf{r}$. Отже:

$$\rho\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mu}{c}\mathbf{F}\mathbf{u},$$

де ρ і μ – власна (інваріантна) масова густина і власна густина електричного заряду. Інваріантний запис рівняння руху дозволяє використовувати будь-яку систему координат. У плоскому просторі-часі антисиметричний тензор

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}\right)' - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}\right),$$

де штрихом позначена транспонована матриця.

Через перехід до рухомої системи координат у правій частині рівняння руху з'явилась коріолісова сила інерції. У цьому випадку скористаємось аналогією з класичною механікою.

Запишемо прискорення Коріоліса:

$$\mathbf{a}_c = 2\left(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r\right) = 2\begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

З іншого боку, переносна швидкість під час обертального руху

$$\mathbf{v}_e = \left(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}\right),$$

а тензор

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином:

$$\mathbf{a}_c = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial \mathbf{r}} \right)' - \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}_r.$$

За аналогією $\mathbf{u} = \mathbf{v}_r, \mathbf{A} = \mathbf{v}_e$, отже, $\mathbf{a}_c = \mathbf{Fu}$.

Кожен із зарядів, що належить до рівняння руху частки середовища, задовольняє рівнянню нерозривності

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho \mathbf{u} = 0, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mu \mathbf{u} = 0.$$

Матричний формалізм і рівняння для векторного потенціалу електромагнітного поля

Щоб одержати рівняння для векторного потенціалу, скористаємось рівнянням балансу для вектора $\mu \mathbf{r}$ у просторі-часі. У диференціальному вигляді

$$\mu \mathbf{u} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{F} + \mathbf{j},$$

де інтенсивність джерела $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ через однорідність простору, а потік $\mathbf{F}$ є антисиметричною двовимірною матрицею. Таким чином:

$$-\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mu \mathbf{u} = 0.$$

Отримуємо рівняння електромагнітного поля:

$$\mu \mathbf{u} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{F},$$

де матрицю $\mathbf{F}$ можна ототожнити з тензором електромагнітного поля.

Відповідно до рівняння руху, тензор електромагнітного поля $\mathbf{F}$ є характеристикою швидкості обертання переносної системи координат і змінює кількість руху частки. Відносний рух частки, якому відповідає густина струму $\mu \mathbf{u}$ також впливає на швидкість обертання переносної системи координат. Отже, ми отримуємо замкнену систему рівнянь, які описують електродинамічні процеси.

Висновки

Визначено, що матричний метод, який у попередній роботі був застосований для викладання класичної механіки, дозволяє користуватись перевагами переходу до простору конфігурацій і фазового простору частки суцільного середовища для отримання канонічних рівнянь релятивістської механіки та рівнянь електромагнітного поля. Крім того, електромагнітне поле розглядається як невід'ємна частина релятивістської динаміки.

Для аналізу електродинамічних процесів у роботі розглядаються електричні явища і використовуються формально-математичні аналогії з класичною механікою. Певною особливістю підходу є застосування нескінченновимірних матриць з дійсними коефіцієнтами, але це не призводить до суттєвих ускладнень.

Запропонований метод дозволяє ефективно формалізувати рівняння електродинаміки, що сприяє їх застосуванню під час розв’язання практичних задач з використанням комп'ютерних технологій у межах стандартної математичної підготовки.

Література

1. Біловол О. В. Закони механіки й універсальні закони природи. Вісник ХНАДУ: зб. наук. праць. Харків: ХНАДУ, 2013. Вип. 60. С. 148–153.
2. Переваги використання матричних методів у викладанні механіки закладами вищої освіти. Вісник ХНАДУ. 2023. № 101.
3. Дудик М. В., Діхтяренко Ю.В. Електродинаміка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. Умань: ПП «Жовтий», 2015. 120 с
4. *Єжов С. М., Макарець М В., Романенко О. В.* Класична механіка. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. 480 с.
5. *Іро Г.* Класична механіка. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 1999. 464 с.
6. Біловол О. В. Сучасна фізика як новітня натуральна філософія. Харків: ФОП Панов А. М., 2019. 116 с.

References

1. Belovol A. V. Zakony mehaniki i universalnye zakony prirody. Visnyk Harkivskogo avtomobilno-dorozhnogo universitetu: sb. nauch. tr. Charkiv: HNADU, 2013. Vyp. 60. S. 148–153.
2. Bilovol O. V. Perevahy vykorystannia matrychnykh metodiv u vykladanni mekhaniky

zakladamy vyshchoi osvity. Visnyk KhNADU. 202. № 101.
3. Dudyk M. V., Dikhtiarenko Yu. V. Elektrodynamika (kurs lektsii): navchalnyi posibnyk dlia studentiv vyshchykh navchalnykh zakladiv fizyko-matematychnykh spetsialnostei. Uman: PP «Zhovtyi», 2015. 120 s
4. Yezhov S. M., Makarets M. V., Romanenko O. V. Classical mechanics. Kyiv: VOC "Kyiv University", 2008. 480 p.
5. Iro G. Classical mechanics. Lviv: LNU named after Ivan Franko, 1999. 464 p
6. Bilovol O. V. Suchasna fizika yak novitnya naturalna filosofiya. Harkiv: FOP Panov A.M., 2019. 116 s.

Біловол Олександр Васильович[1], к.т.н., доц. каф. деталей машин та теорії машин і механізмів, тел. +38 095-537-17-74, avbelovol58@gmail.com,
[1]Харківський національний автомобільно-дорожній університет, *вул. Ярослава Мудрого, 25*, 61002, Україна, м. Харків.

Utilization of Matrix Methods in Teaching Electrodynamics in Higher Education Institutions: Advantages and Perspectives

Abstract. Problem. *The instruction of physical and mathematical disciplines in higher education institutions employing cutting-edge methods and universal approaches, which seamlessly integrate scientific and engineering activities of future specialists, remains one of the pertinent and priority tasks. The utilization of multidimensional or even infinite-dimensional spaces has become an effective and nearly indispensable tool in mathematical modeling of physical phenomena. This circumstance is directly linked to the increasing level of abstraction and the refinement of mathematical methods. The use of geometric methods inherent in vector algebra and vector analysis as the foundation for studying mechanics, despite their illustrative nature, is losing its relevance. Methods built upon matrix formalism are evolving as substitutes. The matrix framework enables the exploitation of phase space advantages to derive canonical equations of motion for continuous media and electromagnetic field equations in covariant forms. The electromagnetic potential acquires mechanical significance, allowing the utilization of electromechanical analogies at a fundamental level rather than on a merely formal basis, as done in classical electrodynamics.* ***Goal.*** *The aim is to broaden the domain of matrix formalism application to infinite-dimensional spaces, substantiate its advantages compared to other approaches used in teaching the fundamentals of electrodynamics, and demonstrate its potential both in terms of modeling and utilizing computer technologies.* ***Methodology****. The methodological foundation for choosing matrix methods lies in the utilization of statistical modeling techniques for the motion of electromechanical systems in infinite-dimensional spaces. Additionally, electrical phenomena are viewed as manifestations of mechanical motion in spacetime. Such an approach enables the extensive use of analogical reasoning to interpret and understand equations that possess the most abstract nature.* ***Results.*** *It has been demonstrated that the matrix method, previously applied in teaching classical mechanics, allows leveraging the benefits of transitioning to configuration space and phase space for obtaining canonical equations of relativistic mechanics and electromagnetic field equations. Moreover, the electromagnetic field is regarded as an integral part of relativistic dynamics.* ***Originality.*** *To enhance the understanding of electrodynamical processes, the mechanical nature of electrical phenomena is explored in this study, employing formal-mathematical analogies with classical mechanics. An inherent feature of the approach is the utilization of infinite-dimensional matrices with real coefficients, which, however, does not lead to significant complications.* ***Practical value.*** *The proposed method effectively formalizes the equations of electrodynamics, facilitating their utilization in solving practical problems with the aid of computer technologies, while remaining within the confines of standard mathematical preparation.*

Key words: *method of teaching electrodynamics, relativistic mechanics, matrix methods, canonical equations, phase space.*

Belovol Oleksandr, Ph.D., Assoc. Prof., Department of Machine Components and Theory of Mechanisms and Machines,
tel. +38095-537-17-74, avbelovol58@gmail.com,
Kharkiv National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukrain