

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛОГІСТИЧНИХ МЕРЕЖ В УМОВАХ ІНТЕРВАЛЬНОЇ ВИЗНАЧЕНОСТІ ВХІДНИХ ДАНИХ

Безкоровайний В. В.<sup>1</sup>, Русскін В. М.<sup>2</sup>, Тітов С. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Харківський національний університет радіоелектроніки

<sup>2</sup>Харківська гуманітарно-педагогічна академія

**Анотація.** Запропонована математична модель задачі оптимізації централізованих логістичних мереж на етапі реінжинірингу для випадку інтервальної визначеності вхідних даних. Для вибору розв'язання запропоновано використовувати індекси порівняння на основі узагальненої різниці Хукухари. Практичне використання запропонованої моделі дозволить підвищити достовірність результатів оптимізації у процесах проектування, планування розвитку та реінжинірингу мереж.

**Ключові слова:** логістична мережа, оптимізація, прийняття рішень, реінжиніринг, структура, топологія.

### Вступ

Ефективність сучасної логістики суттєво визначається структурою та топологією використовуваних логістичних (розподільних) мереж. Вузли розподільних мереж (термінали, розподільні центри, хаби) є своєрідними платформами, через які вантажі, отримані від виробників (постачальників), перерозподіляються до адресатів (споживачів, виробників, точок продажу) [1].

Водночас витратні та функціональні характеристики таких мереж визначаються топологією (розміщенням) їхніх вузлів. Топологія вузлів логістичної мережі (ЛМ) також визначає структуру й топологію відповідних потоків [2–4]. Задачі багатокритеріальної системної оптимізації ЛМ є обов'язковою складовою технологій проектування чи модернізації систем виробництва та збуту, доставки сировини, збирання відходів, технічного обслуговування та ремонту озброєння й військової техніки тощо [5–6].

Зміна умов функціонування систем логістики (зміна множини та топології постачальників і споживачів, обсягів поставок, тарифів тощо) призводить до того, що на певному етапі вони стають неефективними. Для оптимізації мереж у нових умовах здійснюється їхній реінжиніринг, який передбачає фундаментальний аналіз наявних варіантів їх побудови (видів транспорту, структури, топології, параметрів, технології) з можливістю радикального перепроектування [2, 7–8]. У цьому випадку головною проблемою щодо обчислювання є оптимізація їхньої топологічної структури в умовах можливих змін номенк-

латури, обсягів поставок, характеристик транспортних засобів і транспортних мереж.

Дослідження щодо реінжинірингу ЛМ в умовах неповної визначеності вхідних даних дозволяють отримувати більш стійкі рішення, зменшувати витрати на транспортування вантажопотоків, підвищувати ефективність використання транспортних засобів і вузлів, а отже, зменшувати організаційні витрати на логістику.

### Аналіз публікацій

Процес оптимізації ЛМ як територіально розподіленого об'єкта передбачає розв'язання комплексу задач її технологічної, структурної, параметричної та топологічної оптимізації [2, 7–8]. Водночас на основі багатокритеріального аналізу умовно незалежно розв'язуються задачі оптимізації мікро- і макрологістичних систем [9–10]. На рівні мікрологістики здійснюється адаптація наявної мережі через оперативне розв'язання задачі оптимізації кінцевих кільцевих маршрутів. За умови значних змін потоків виникає необхідність у реінжинірингу та в створенні макрологістичних мереж [2].

Останнім часом все більш актуальними стають задачі екологічної логістики, спрямовані на зниження ризиків економічних втрат, зумовлених погіршенням навколишнього середовища [11–13]. Одним з напрямів екологічної логістики стала реверсивна логістика, тобто впорядкування та систематизація зворотних товарно-матеріальних потоків [14–15]. Через необхідність спільного розв'язання задач прямої (традиційної) і реверсивної (звотної) логістики актуальною є

проблема розроблення нових ефективних математичних моделей і методів оптимізації замкнених ЛМ [16–17].

Класична задача оптимізації централізованої ЛМ містить такі задані [2, 7]: місце розташування центру постачання, множина споживачів (місця розташування, обсяги постачання), витрати на створення й експлуатацію вузлів (терміналів, хабів) та транспортні тарифи на доставку вантажів. Необхідно визначити оптимальну кількість і місця розташування вузлів, а також підмножини споживачів, що отримують вантажі з кожного з вузлів. Метою є мінімізація наведених витрат на функціонування ЛМ за умови дотримання обмежень на час доставки вантажів споживачам.

Різновидами класичної задачі є задачі вибору заданої кількості місць для будівництва вузлів (розподільчих центрів) [1], вибору стратегії спільного використання транспортних засобів [18], розроблення моделі ЛМ, яка допомагає інтегрувати логістичні ресурси, зменшити витрати на логістику та підвищити ефективність логістики тощо [19]. Задача оптимізації мереж замкнутої логістики передбачає врахування реверсивних потоків від споживачів до центрів (місць виробництва, перероблення чи утилізації) [14–15].

Запропоновані математичні моделі задач оптимізації мереж призначені для використання на стадіях їхнього проектування чи вдосконалення в умовах повної визначеності. Для розв'язання задач у процесі реінжинірингу ЛМ необхідне розроблення моделей, які б враховували можливість використання вузлів і транспортних засобів наявної інфраструктури та інтервали можливих змін попиту та трафіку [20].

У моделях задач оптимізації з нечітко заданими змінними та параметрами використовуються їхній інтервальний зміст. У цьому випадку вхідні дані та кожна з характеристик визначаються двома граничними значеннями. Для здійснення операцій класичної арифметики над інтервальними значеннями параметрів і змінних моделей оптимізації  $[a] \in [a^-; a^+]$  і  $[b] \in [b^-; b^+]$  використовуються відомі співвідношення [21–25]:

$$[c^-; c^+] = [a^-; a^+] \circ [b^-; b^+]; \quad (1)$$

$$[a] + [b] = [a^- + b^-; a^+ + b^+]; \quad (2)$$

$$[a] - [b] = [a^- - b^+; a^+ - b^-]; \quad (3)$$

$$[a] \cdot [b] = [\min\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ \cdot b^+\}; \max\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ \cdot b^+\}]; \quad (4)$$

$$[a] / [b] = [a] \cdot [1/b^+; 1/b^-]. \quad (5)$$

Порівняння значень в обмеженнях і змінних цільових функцій, які подані як інтервали, що не перетинаються, здійснюється способом порівняння їхніх середніх значень (центрів). Для інтервальних значень локальних критеріїв та обмежень, що перетинаються, можна використати аналіз узагальненої різниці Хукухари (Hukuhara) (gH-різниця, інтервальна різниця) [22–27].

### Мета та постановка завдання

Аналіз публікацій щодо розв'язання задач проблеми системної оптимізації логістичних мереж демонструє таке [1–27]:

- з огляду на те, що в сучасних ЛМ використовується відносно невелика множина альтернативних технологій управління потоками, типами вузлів, видами транспорту та типами транспортних засобів, головною проблемою є оптимізація їхніх топологічних структур;

- у переважній більшості задач оптимізації не враховується інфраструктура наявних мереж;

- наявні математичні моделі та методи оптимізації ЛМ на етапі їх реінжинірингу призначені для умов з точковими та чітко визначеними вхідними даними.

Виникає необхідність у розробленні математичних моделей багатокритеріальних задач оптимізації логістичних мереж на етапі реінжинірингу для умов інтервального запису вхідних даних.

З огляду на це метою статті є підвищення ефективності технології оптимізації логістичних мереж на етапі реінжинірингу завдяки розробленню математичної моделі задачі багатокритеріальної оптимізації для умов інтервального запису вхідних даних.

Найбільш поширеним класом макрологістичних мереж є централізовані трирівневі мережі, що призначені для доставки вантажів з центру до заданої множини споживачів (отримувачів) через один з вузлів.

Задача реінжинірингу топологічної структури централізованої трирівневої ЛМ складається з таких елементів:

задані:

- множина елементів (центр, вузли, споживачі) наявної ЛМ та попит споживачів (обсяги доставок);

– варіант топологічної структури ЛМ, який задається місцями розташування споживачів, вузлів (знаходяться в одному приміщенні з місцями розміщення споживачів), центру виробництва та переробляння, а також зв'язками між споживачами, вузлами і центром;

– наведені витрати на створення (модернізацію), експлуатацію вузлів, реалізацію перевезень, вартість ресурсів, які можуть бути повторно використані (чи реалізовані).

Необхідно визначити найкращий за показниками витрат і часу доставки варіант топологічної структури логістичної мережі.

**Основний матеріал дослідження.**

**Модель структурно-топологічної оптимізації ЛМ за показником витрат**

З огляду на неповну визначеність вхідних даних (попит, тарифи, витрати, швидкості транспортування тощо) запишемо їх як інтервали:  $[w_i] \in [w_i^-; w_i^+]$ ,  $i = \overline{1, n_D}$  (де  $n_D$  – кількість видів даних). Змінні в цільових функціях витрат (капітальних, експлуатаційних, наведених) й оперативності (часу доставки вантажів) для варіантів побудови мережі  $s \in S$  (де  $S$  – множина допустимих варіантів побудови мережі) будемо подавати інтервальними значеннями:  $[x_i(s)] \in [x_i^-(s); x_i^+(s)]$ ,  $i = \overline{1, n_V}$  (де  $n_V$  – кількість змінних). Значення локальних критеріїв витрат та оперативності для варіантів  $s \in S$ :  $[k_j(s)] = [k_j^-(s); k_j^+(s)]$ ,  $j = \overline{1, 2}$ .

Застосуємо такі значення [7]:

- $I = \{i : i = \overline{1, n}\}$  – множина елементів наявної мережі (центру, вузлів, споживачів);
- $s \in S$  – варіант побудови ЛМ, який задається місцями розташування споживачів,

вузлів, центру (місце розміщення елемента  $i = 1$ ), зв'язками між споживачами, вузлами та центром:  $[s'_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  ( $s'_{ij} = 1$ , якщо між елементами  $i$  та  $j$  існує безпосередній зв'язок, та  $s'_{ij} = 0$  – в іншому випадку).

Обмеження, які визначають тривірневу структуру централізованої мережі:

– кожен споживач  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$  має бути зв'язаним з одним з вузлів:  $\sum_{j=1}^i s_{ij} + \sum_{i=j}^n s_{ij} = 1$

для всіх  $i$ , для яких  $s_{ii} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  або безпосередньо з центром  $s_{i1} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

– до кожного вузла має бути безпосередньо під'єднано більше одного споживача  $\sum_{j=1}^i s_{ij} + \sum_{i=j}^n s_{ij} > 1$ , для всіх  $i$ , для яких  $s_{ii} = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

– кожен споживач  $i$  під'єднується до вузла  $j$  за показником мінімуму наведених витрат:

$$s_{ii} \wedge s_{ij} = 1 \rightarrow ij = \arg \min_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij} \quad "i, j = \overline{1, n};$$

– кожен з вузлів  $j$  має безпосередній зв'язок з центром:  $s_{jj} = 1 \rightarrow s_{1j} = 1$ ,  $"i, j = \overline{1, n}$ ;

– кількість вузлів знаходиться в діапазоні  $1 \leq \sum_{i=1}^n s_{ii} \leq n / 2$ ;

– загальна кількість зв'язків у структурі  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n s_{ij} = n + \sum_{i=1}^n s_{ii}$ .

З використанням вищенаведених значень математичну модель задачі визначення найкращого варіанта реінжинірингу топологічної структури ЛМ за показником витрат пропонується записати так:

$$[k_1(s', s)] = \sum_{j=1}^n \{ [a_j](1 - s'_{jj})s_{jj} + [b_j]s'_{jj}s_{jj} + [c_j](1 - s_{jj})s'_{jj} - [d_j](1 - s_{jj})s'_{jj} \} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \{ [e_{ji}](1 - s'_{ji})s'_{ji} + [f_{ji}]s'_{ji}s_{ji} + [g_{ji}](1 - s'_{ji})s'_{ji} - [h_{ji}](1 - s'_{ji})s'_{ji} \} \rightarrow \min_{s \in S} \tag{6}$$

$$S = \{ s \} = \left\{ \begin{array}{l} [s_{ij}], s_{ij} \in \{0, 1\}, i, j = \overline{1, n}, s_{11} = 1; \sum_{i=j}^n s_{ij} \geq 1, \forall j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n s_{ij} = n + \sum_{i=1}^n s_{ii}, s_{ii} = 1 \rightarrow s_{i1} = 1 \forall i = \overline{1, n}; \\ s_{ii} \wedge s_{ij} = 1 \rightarrow ij = \arg \min_{1 \leq i, j \leq n} [e_{ij}] \forall i, j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \tag{7}$$

де  $[a_j], [b_j], [c_j], [d_j], j = \overline{1, n}$  – витрати на створення, модернізацію, демонтаж та вартість ресурсів, які можуть бути повторно використані (або реалізовані) після демонтажу обладнання  $j$ -го вузла в новій структурі;  $s_{ij}^c, s_{ij}$  – елементи матриць суміжності (зв'язків) між елементами в наявній мережі та в мережі після реінжинірингу;  $[e_{ij}], [f_{ij}], [g_{ij}], [h_{ij}]$  – витрати на перевезення вантажів, модернізацію, демонтаж (утилізацію) та вартість ресурсів, які можуть бути повторно використані (або реалізовані) для доставки вантажів між елементами  $i$  та  $j, i, j = \overline{1, n}$ .

Математична модель (6)–(7) містить зміст задачі структурно-топологічної оптимізації ЛМ. Вона може бути використана для реінжинірингу мережі за показниками капітальних, експлуатаційних або наведених витрат.

$$[k_2(s)] = \max_{s \in S} \left\{ \sum_{l \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \{ [t_{lj}(s)] + [\tau_j(s)] + [t_{ji}(s)] \} s_{ji} \right\} \rightarrow \min. \quad (8)$$

У двокритеріальній задачі структурно-топологічної оптимізації ЛМ вибір варіантів, що задовольняють обмеженням (7), здійснюється одночасно за двома показниками (6) і (8). Для цього на множині допустимих варіантів побудови мережі (7) необхідно визначити найбільш ефективний варіант  $s^o \in S$  за узагальненим показником, що оцінює його узагальнену корисність [7]:

$$s^o = \arg \max_{s \in S} P(s). \quad (9)$$

В умовах неповної визначеності вимог до ЛМ як оцінку її ефективності  $P(s)$  в моделі

$$P(s) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \xi_i(s) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i}^2 \lambda_{ij} \xi_i(s) \xi_j(s) \rightarrow \max_{s \in S}, \quad (11)$$

$$\xi_l(s) = \begin{cases} \bar{a} \cdot (b_l + 1) \cdot \left\{ 1 - \left[ b_l / \left( b_l + \frac{\bar{k}(s)}{\bar{k}_a} \right) \right] \right\}, & 0 \leq \bar{k}(s) \leq \bar{k}_a; \\ \bar{a} + (1 - \bar{a}) \cdot (b_l + 1) \cdot \left\{ 1 - \left[ b_l / \left( b_l + \frac{\bar{k}(s) - \bar{k}_a}{1 - \bar{k}_a} \right) \right] \right\}, & \bar{k}_a < \bar{k}(s) \leq 1, \end{cases} \quad (12)$$

де  $\lambda_i, \lambda_{ij}$  – вагові коефіцієнти локальних критеріїв та їхніх добутків  $\lambda_i \geq 0, \lambda_{ij} \geq 0$ ,  $\xi_l(s)$  – функція корисності локального критерію  $k_l(x)$ ,  $l = i, j$ ;  $\bar{k}_a, \bar{a}$  – нормовані значення координат точки склеювання складових функцій (12),  $0 \leq \bar{k}_a \leq 1, 0 \leq \bar{a} \leq 1$ ;  $b_1, b_2$  – параметри, які визначають вид (лі-

### Модель двокритеріальної задачі структурно-топологічної оптимізації ЛМ

Крім витрат, важливим показником якості ЛМ є її оперативність. Пропонується як другий локальний критерій використати показник оперативності, що визначає час доставки вантажів споживачам мережі.

Час доставки вантажу  $i$ -му споживачу складається з часу доставки його від центру до відповідного  $j$ -го вузла  $[t_{lj}(s)]$  оброблення (перевантаження, очікування відправлення, оформлення документації тощо) вантажу в ньому  $[\tau_j(s)]$  та доставки його з  $j$ -го вузла до  $i$ -го споживача  $[t_{ji}(s)]$ . Тоді максимуму оперативності логістичної мережі відповідатиме мінімальний час доставки вантажу до «найвіддаленішого» споживача:

(9) пропонується використовувати функцію належності нечіткій множині «Найкращий варіант» [20, 26]:

$$\langle \text{Найкращий варіант} \rangle = \{ \langle s, P(s) \rangle \}, \quad (10)$$

де  $P(s)$  – значення функції загальної корисності варіанта  $s \in S$ , яке визначає ступінь його належності нечіткій множині (10).

Для кількісного аналізу варіантів побудови мережі можна використати класичну адитивну модель або адитивно-мультиплікативну модель, побудовану на основі полінома Колмогорова-Габора [20, 26]:

нійна, опукла, вигнута) функції на початковому та кінцевому відрізках.

Функція-склейка (12) має переваги за показниками точності та кількості комп'ютерних операцій, необхідних для її обчислення, як порівняти з функціями Гаусса, Харрінгтона і логістичною функцією [20, 26].

У випадку, коли зміна часу доставки (8) для варіантів побудови мережі  $s \in S$  (7) є

некритичною, двокритеріальна задача структурно-топологічної оптимізації ЛМ (6)–(8) зводиться до однокритеріальної задачі (6)–(7) з додатковим обмеженням на максимальний час доставки вантажу:  $[k_2(s)] \leq k_2^*$  ( $k_2^*$  – допустимий час доставки вантажів для всієї множини споживачів  $s \in S$ ).

#### Алгоритм порівняння інтервальних значень критерію ефективності

Задача, що розглядається, належить до класу дискретних задач комбінаторної оптимізації. З огляду на високу часову складність точних методів для її розв'язання доцільним є використання методів спрямованого аналізу варіантів [28] з урахуванням інтервального визначення вхідних даних [21].

Для порівняння інтервалів скористаємось індексом, побудованим на основі узагальне-

$$A \underset{gH}{-} B = [\min\{a^- - b^-; a^+ - b^+\}; \max\{a^- - b^-; a^+ - b^+\}] = (\hat{a} - \hat{b}; |\bar{a} - \bar{b}|), \quad (13)$$

$$\gamma_{A,B} = (\bar{a} - \bar{b}) / (\hat{a} - \hat{b}). \quad (14)$$

Індекс порівняння  $\gamma_{A,B}$  (14) має значення показника міри ризику чи виграшу у випадку, коли необхідно вибрати інтервал  $A$  замість  $B$  лише на підставі нерівності  $\hat{a} > \hat{b}$  [22–25].

У моделі задачі, що розглядається, необхідно отримати максимум загальної цільової функції  $P(s)$  (11). У цьому випадку за умови позитивного середнього виграшу  $\hat{a} > \hat{b}$  можливі такі ситуації перетину інтервалів [22]:

ситуація 1:  $a^- < b^-$ . У цьому випадку деякі значення першого інтервалу  $a \in A$  є гіршими, ніж усі значення другого інтервалу  $b \in B$ . Можлива втрата якості розв'язку (варіанта побудови ЛМ) через помилковий вибір у найгіршому випадку становитиме  $\bar{a} - \bar{b} < 0$ . Отже, співвідношення втрат у найгіршому випадку до середнього виграшу становитиме

$$I_1(A,B) = (a^- - b^-) / (\hat{a} - \hat{b}) = 1 - \gamma_{A,B} < 0; \quad (15)$$

ситуація 2:  $a^- \geq b^-$ . У цьому випадку деякі значення другого інтервалу  $b \in B$  гірші за всі значення першого інтервалу  $a \in A$ .

Втрат якості у найгіршому випадку немає:

$$I_2(A,B) = (a^- - b^-) / (\hat{a} - \hat{b}) = 1 - \gamma_{A,B} > 0; \quad (16)$$

ситуація 3:  $a^+ < b^+$ . У цьому випадку всі значення першого інтервалу  $a \in A$  гірші за деякі значення другого інтервалу  $b \in B$ . Від'ємне значення різниці  $a^+ - b^+ < 0$  визначає мож-

ної різниці Хукухари [22–25].

Значення характеристики  $j$ ,  $j = \overline{1,2}$  для двох різних варіантів побудови ЛМ  $u, v \in S$  будемо визначати як деякі інтервали  $A = [k_j^-(u); k_j^+(u)]$  і  $B = [k_j^-(v); k_j^+(v)]$  у вигляді  $A = [\hat{a}; \bar{a}]$  і  $B = [\hat{b}; \bar{b}]$ , де  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  – центри та радіуси інтервалів  $A$  і  $B$ :

$$\hat{a} = [a^- + a^+] / 2, \quad \bar{a} = [a^+ - a^-] / 2,$$

$$\hat{b} = [b^- + b^+] / 2, \quad \bar{b} = [b^+ - b^-] / 2.$$

Узагальнена різниця Хукухари  $A \underset{gH}{-} B$  та відповідний їй індекс порівняння  $\gamma_{A,B}$  для інтервалів  $A = [\hat{a}; \bar{a}]$  і  $B = [\hat{b}; \bar{b}]$  визначаються за співвідношенням [22]:

ливі втрати в найгіршому випадку. Отже, співвідношення втрат до середнього виграшу в найгіршому випадку визначається за співвідношенням

$$I_3(A,B) = (a^+ - b^+) / (\hat{a} - \hat{b}) = 1 + \gamma_{A,B} < 0; \quad (17)$$

ситуація 4:  $a^+ \geq b^+$ . У цьому випадку деякі значення першого інтервалу  $a \in A$  є кращими за всі значення другого інтервалу  $b \in B$ , а втрати у найгіршому випадку відсутні:

$$I_4(A,B) = (a^+ - b^+) / (\hat{a} - \hat{b}) = 1 + \gamma_{A,B} > 0. \quad (18)$$

Використання співвідношень (15)–(18) дозволяє отримати розв'язок задачі структурно-топологічної оптимізації ЛМ за показниками витрат і часу доставки вантажів з (6)–(8) для інтервально визначених вхідних даних і відповідних значень локальних критеріїв.

#### Висновки

Під час аналізу сучасних підходів до організації логістичних мереж на етапі їх реінжинірингу визначено, що головною проблемою є оптимізація їхніх топологічних структур, а наявні математичні моделі та методи їх оптимізації призначені для умов з точковими та чітко визначеними вхідними даними. Це визначило актуальність науково-прикладного завдання розроблення математичних моделей багатокритеріальних задач оптимізації логістичних мереж для умов інтервального запису вхідних даних.

Визначена та розроблена математична модель двокритеріальної (за показниками

витрат і оперативності) задачі реінжинірингу централізованих тривірневих топологічних структур ЛМ для інтервально визначених вхідних даних і значень локальних критеріїв.

Отримані результати дозволяють підвищити ефективність технологій оптимізації логістичних мереж на етапі реінжинірингу завдяки використанню математичної моделі задачі оптимізації для умов інтервального запису вхідних даних. Практичне використання запропонованої моделі дозволить підвищити достовірність результатів оптимізації у процесах проєктування, планування розвитку та реінжинірингу мереж, отримувати стійкі до зміни зовнішніх умов варіанти побудови топологічних структур логістичних мереж.

Напрямами подальших досліджень можуть бути розроблення математичних моделей на основі додаткових показників надійності і (та) застосування, комплексу ефективних методів і алгоритмів розв'язання задач оптимізації логістичних мереж різної розмірності в умовах неповної визначеності даних.

### Література

1. Optimization of a logistics network considering allocation of facilities and taxation aspects / Furlanetto B. V. R., Marins F. A. S., Silva A. F., Defalque C. M. *Gestão & Produção*. 2020. Vol. 27(4). e4918. URL: <https://doi.org/10.1590/0104-530X4918-20> (дата звернення: 06.10.2023).
2. Beskorovainyi V., Sudik A. Optimization of topological structures of centralized logistics networks in the process of reengineering. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2021. No. 1 (15). P. 23–31. URL: <https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.15.023> (дата звернення: 06.10.2023).
3. Govindan K., Fattahi M., Keyvanshokoo E. Supply chain network design under uncertainty: A comprehensive review and future research directions. *European Journal of Operational Research*. 2017. Vol. 263. P. 108–141. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717303429> (дата звернення: 06.10.2023).
4. Pellicer P. C., Valero F. A. Identification of Reverse Logistics Decision Types from Mathematical Models. *Journal of Industrial Engineering and Management*. 2018. Vol. 11. No. 2. P. 239–249. URL: <https://www.jiem.org/index.php/jiem/article/view/2530> (дата звернення: 06.10.2023).
5. Rodríguez J. V., Niño J. P. C., Negrete K. A. P. Optimization of the distribution logistics network: a case study of the metalworking industry in Colombia. *Procedia Computer Science*. 2022. Vol. 198. P. 524–529. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921025199#section-cited-by> (дата звернення: 25.05.2023).
6. Морозов О. О. Методика розв'язання задачі синтезу топологічної та функціональної структур систем ремонту озброєння і військової техніки. *Науковий вісник Київського інституту національної гвардії України*. 2023. № 1. С. 6–10. URL: <https://kingvisnyk.kyiv.ua/index.php/journal/article/view/12> (дата звернення: 25.05.2023).
7. Безкоровайний В. В., Нефьодов Л. І., Русскін В. М. Математична модель структурно-топологічної оптимізації логістичних мереж. *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*, 2021. Вип. 95. С. 178–184. URL: [10.30977/BUL.2219-5548.2021.95.0.178](https://doi.org/10.30977/BUL.2219-5548.2021.95.0.178) (дата звернення: 29.05.2023).
8. Beskorovainyi V., Draz O. Mathematical models of decision support in the problems of logistics networks optimization. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2021. No. 4 (18), P. 5–14. URL: <https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.18.005> (дата звернення: 29.05.2023).
9. Gattuso D., Cassone G. C., Pellicanò D. S. A Micro-simulation Model for Performance Evaluation of a Logistics Platform. *Transportation Research Procedia*. 2014. Vol. 3. P. 574–583. URL: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2014.10.036> (дата звернення: 29.05.2023).
10. Larson P. D. Relationships between Logistics Performance and Aspects of Sustainability: a Cross-Country Analysis. *Journal of Transport and Supply Chain Management*. 2018. Vol. 12. P. 623–632. URL: [doi: 10.3390/su13020623](https://doi.org/10.3390/su13020623) (дата звернення: 29.05.2023).
11. Furtak A., Błażej M. Green supply chain. Developing logistics with care for the. *Acta Universitatis Nicolai Copernici*. 2020. Vol. 47. No. 1. P. 65–73. URL: [http://dx.doi.org/10.12775/AUNC\\_ZARZ.2020.1.006](http://dx.doi.org/10.12775/AUNC_ZARZ.2020.1.006) (дата звернення: 15.10.2023).
12. Jo D., Kwon C. Structure of Green Supply Chain Management for Sustainability of Small and Medium Enterprises. *Sustainability*. 2022. Vol. 14. No. 1. P. 50. URL: <https://doi.org/10.3390/su14010050> (дата звернення: 29.05.2023).
13. Ye Y, Wang J. Study of logistics network optimization model considering carbon emissions. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*. 2017. Vol. 8. No. 2. P. 1102–1108. URL: [doi: 10.1007/s13198-017-0576-x](https://doi.org/10.1007/s13198-017-0576-x) (дата звернення: 05.09.2023).
14. Pollock B., Dutta S. Driving Returns in the Reverse Logistics Service Chain. *Reverse Logistics Magazine*. 2016. Edition 16. PP. 26–29.
15. Reverse Logistics and Urban Logistics: making a Link / Rubio S., Jiménez-Parra B., Chamorro-Mera A., Miranda F. J. *Sustainability*. 2019. Vol. 11. No. 20. URL: <https://doi.org/10.3390/su11204611> (дата звернення: 29.05.2023).

- <https://doi.org/10.3390/su11205684> (дата звернення: 05.09.2023).
16. Kovtun T. A model of closed circuits forming in a logistics system with feedback. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2020. No. 4 (14). P. 113–120. URL: <https://doi.org/10.30837/ITSSI.2020.14.113> (дата звернення: 12.09.2023).
  17. Beskorovainyi V., Kuropatenko O., Gobov D. Optimization of transportation routes in a closed logistics system. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2019. No. 4 (10). P. 24–32. URL: <https://itssi-journal.com/index.php/itssi/article/view/156> (дата звернення: 12.09.2023).
  18. Yang T., Wang W. Logistics Network Distribution Optimization Based on Vehicle Sharing. *Sustainability*. 2022. Vol. 14. 2159. URL: DOI: <https://doi.org/10.3390/su14042159> (дата звернення: 25.05.2023).
  19. Douiri L., Jabri A., El Barkany A. Models for Optimization of Supply Chain Network Design Integrating the Cost of Quality: A Literature Review. *American Journal of Industrial and Business Management*. 2016. Vol. 6. No. 8. P. 860–876 URL: doi: 10.4236/ajibm.2016.68082 (дата звернення: 05.09.2023).
  20. Beskorovainyi V., Kolesnyk L., Yevstrat D. Formalization of the problem of transport logistics optimization networks at the stage of reengineering. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2022. No. 2 (20). P. 5–13. URL: <https://journals.uran.ua/itssi/article/view/262022> (дата звернення: 12.09.2023).
  21. Jiang C., Han X., Xie H. The Basic Principles of Interval Analysis. *Nonlinear Interval Optimization for Uncertain Problems*. 2021. P. 25–34. URL: [https://doi.org/10.1007/978-981-15-8546-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-15-8546-3_2) (дата звернення: 19.09.2023).
  22. Guerra M. L., Stefanini L. A comparison index for interval ordering based on generalized Hukuhara difference. *Soft Computing*. 2012. Vol. 16. No. 11. P. 1–25. URL: <https://doi.org/10.1007/s00500-012-0866-9> (дата звернення: 19.09.2023).
  23. Stefanini L., Guerra M. L., Amicizia B. Interval Analysis and Calculus for Interval-Valued Functions of a Single Variable. Part I: Partial Orders, gH-Derivative, Monotonicity. *Axioms*. 2019. Vol. 8. No. 4. 113. URL: <https://doi.org/10.3390/axioms8040113> (дата звернення: 19.09.2023).
  24. Stefanini L., Arana-Jimenez M. Karush-Kuhn-Tucker conditions for interval and fuzzy optimization in several variables under total and directional generalized differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*. 2019. Vol. 362. P. 1–34. URL: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.009> (дата звернення: 26.09.2023).
  25. Kosheleva O., Kreinovich V., Pham. U. Decision-making under interval uncertainty revisited. *Asian Journal of Economics and Banking*. 2021. Vol. 5. No. 1. P. 79–85. URL: <https://doi.org/10.1108/AJEB-07-2020-0030> (дата звернення: 26.09.2023).
  26. Beskorovainyi V., Kolesnyk L., Mgbere Ch. Mathematical models for determining the Pareto front for building technological processes options under the conditions of interval presentation of local criteria. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2023. No. 2 (24). P. 16–26. URL: <https://journals.uran.ua/itssi/article/view/285493> (дата звернення: 12.09.2023).
  27. Beskorovainyi V., Kolesnyk L. Interval model of multi-criterion task of reengineering physical structures of distributed databases. *Intelligent information systems for decision support in project and program management: collective monograph*. Riga: ISMA, 2021. P. 7–14. URL: <https://doi.org/10.30837/MMP.2021.007> (дата звернення: 19.09.2023).
  28. Beskorovainyi V., Imanhulova Z. Technology of large-scale objects system optimization. *ECONTECHMOD*. 2017. Vol. 06. №4. P. 3–8. URL: <https://bibliotekanauki.pl/articles/410841> (дата звернення: 19.09.2023).

#### References

1. Optimization of a logistics network considering allocation of facilities and taxation aspects / Furlanetto B. V. R., Marins F. A. S., Silva A. F., Defalque C. M. *Gestão & Produção*. 2020. Vol. 27(4). e4918. URL: <https://doi.org/10.1590/0104-530X4918-20> (accessed: 06.10.2023).
2. Beskorovainyi V., Sudik A. Optimization of topological structures of centralized logistics networks in the process of reengineering. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2021. No. 1 (15). P. 23–31. URL: <https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.15.023> (accessed: 06.10.2023).
3. Govindan K., Fattahi M., Keyvanshokoo E. Supply chain network design under uncertainty: A comprehensive review and future research directions. *European Journal of Operational Research*. 2017. Vol. 263. P. 108–141. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717303429> (accessed: 06.10.2023).
4. Pellicer P. C., Valero F. A. Identification of Reverse Logistics Decision Types from Mathematical Models. *Journal of Industrial Engineering and Management*. 2018. Vol. 11. No. 2. P. 239–249. URL: <https://www.jiem.org/index.php/jiem/article/view/2530> (accessed: 06.10.2023).
5. Rodríguez J. V., Niño J. P. C., Negrete K. A. P. Optimization of the distribution logistics network: a case study of the metalworking industry in Colombia. *Procedia Computer Science*. 2022. Vol. 198. P. 524–529. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921025199#section-cited-by> (accessed: 25.05.2023).
6. Morozov O. O. (2023). *Metodyka rozviazannia*

- zadachi syntezy topologichnoi ta funktsionalnoi struktur system remontu ozbroiennia i viiskovoi tekhniki [The method of solving the problem of synthesis of topological and functional structures of systems of repair of weapons and age-old equipment]. *Scientific Bulletin of the Kyiv Institute of the National Guard of Ukraine*, 1. 6–10 [in Ukrainian]. Retrived from: <https://kingu-visnyk.kyiv.ua/index.php/journal/article/view/12> (accessed: 25.05.2023).
7. Bezkorovainyi V. V., Nefodov L. I., Russkin V. M. (2021). Matematychna model strukturno-topologichnoi optymizatsii lohistychnykh merezh [Mathematical model of structural and topological optimization of logistics networks]. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho avtomobilno-dorozhnoho universytetu*, 4, 26–33 [in Ukrainian]. Retrived from: [10.30977/BUL.2219-5548.2021.95.0.178](https://doi.org/10.30977/BUL.2219-5548.2021.95.0.178) (accessed: 25.05.2023).
  8. Beskorovainyi V., Draz O. Mathematical models of decision support in the problems of logistics networks optimization. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2021. No. 4 (18), P. 5–14. URL: <https://doi.org/10.30837/ITSSI.2021.18.005> (accessed: 29.05.2023).
  9. Gattuso D., Cassone G. C., Pellicanò D. S. A Micro-simulation Model for Performance Evaluation of a Logistics Platform. *Transportation Research Procedia*. 2014. Vol. 3. P. 574–583. URL: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2014.10.036> (accessed: 29.05.2023).
  10. Larson P. D. Relationships between Logistics Performance and Aspects of Sustainability: a Cross-Country Analysis. *Journal of Transport and Supply Chain Management*. 2018. Vol. 12. P. 623–632. URL: doi: 10.3390/su13020623 (accessed: 29.05.2023).
  11. Furtak A., Błażej M. Green supply chain. Developing logistics with care for the. *Acta Universitatis Nicolai Copernici*. 2020. Vol. 47. No. 1. P. 65–73. URL: [http://dx.doi.org/10.12775/AUNC\\_ZARZ.2020.1.006](http://dx.doi.org/10.12775/AUNC_ZARZ.2020.1.006) (accessed: 15.10.2023).
  12. Jo D., Kwon C. Structure of Green Supply Chain Management for Sustainability of Small and Medium Enterprises. *Sustainability*. 2022. Vol. 14. No. 1. 50. URL: <https://doi.org/10.3390/su14010050> (accessed: 29.05.2023).
  13. Ye Y, Wang J. Study of logistics network optimization model considering carbon emissions. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*. 2017. Vol. 8. No. 2. P. 1102–1108. URL: doi: 10.1007/s13198-017-0576-x (accessed: 05.09.2023).
  14. Pollock B., Dutta S. Driving Returns in the Reverse Logistics Service Chain. *Reverse Logistics Magazine*. 2016. Edition 16. PP. 26–29.
  15. Reverse Logistics and Urban Logistics: making a Link / Rubio S., Jiménez-Parra B., Chamorro-Mera A., Miranda F. J. *Sustainability*. 2019. Vol. 11. No. 20. URL: <https://doi.org/10.3390/su11205684> (accessed: 05.09.2023).
  16. Kovtun T. A model of closed circuits forming in a logistics system with feedback. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2020. No. 4 (14). P. 113–120. URL: <https://doi.org/10.30837/ITSSI.2020.14.113> (accessed: 12.09.2023).
  17. Beskorovainyi V., Kuropatenko O., Gobov D. Optimization of transportation routes in a closed logistics system. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2019. No. 4 (10). P. 24–32. URL: <https://itssi-journal.com/index.php/itssi/article/vi-ew/156> (accessed: 12.09.2023).
  18. Yang T., Wang W. Logistics Network Distribution Optimization Based on Vehicle Sharing. *Sustainability*. 2022. Vol. 14. 2159. URL: DOI: <https://doi.org/10.3390/su14042159> (accessed: 25.05.2023).
  19. Douiri L., Jabri A., El Barkany A. Models for Optimization of Supply Chain Network Design Integrating the Cost of Quality: A Literature Review. *American Journal of Industrial and Business Management*. 2016. Vol. 6. No. 8. P. 860–876 URL: doi: 10.4236/ajibm.2016.68082 (accessed: 05.09.2023).
  20. Beskorovainyi, V., Kolesnyk, L., Yevstrat D. (2022). Formalization of the problem of transport logistics optimization networks at the stage of reengineering. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2. 20. 5–13. Retrived from: <https://journals.urau.ua/itssi/article/view/262022> (accessed: 12.09.2023).
  21. Jiang C., Han X., Xie H. The Basic Principles of Interval Analysis. *Nonlinear Interval Optimization for Uncertain Problems*. 2021. P. 25–34. URL: [https://doi.org/10.1007/978-981-15-8546-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-981-15-8546-3_2) (accessed: 19.09.2023).
  22. Guerra M. L., Stefanini L. A comparison index for interval ordering based on generalized Hukuhara difference. *Soft Computing*. 2012. Vol. 16. No. 11. P. 1–25. URL: <https://doi.org/10.1007/s00500-012-0866-9> (accessed: 19.09.2023).
  23. Stefanini L., Guerra M. L., Amicizia B. Interval Analysis and Calculus for Interval-Valued Functions of a Single Variable. Part I: Partial Orders, gH-Derivative, Monotonicity. *Axioms*. 2019. Vol. 8. No. 4. 113. URL: <https://doi.org/10.3390/axioms8040113> (accessed: 19.09.2023).
  24. Stefanini L., Arana-Jimenez M. Karush-Kuhn-Tucker conditions for interval and fuzzy optimization in several variables under total and directional generalized differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*. 2019. Vol. 362. P. 1–34. URL: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.009> (accessed: 26.09.2023).
  26. Kosheleva O., Kreinovich V., Pham. U. Decision-



- making under interval uncertainty revisited. *Asian Journal of Economics and Banking*. 2021. Vol. 5. No. 1. P. 79–85. URL: <https://doi.org/10.1108/AJEB-07-2020-0030> (accessed: 26.09.2023).
27. Beskorovainyi V., Kolesnyk L., Mgbere Ch. Mathematical models for determining the Pareto front for building technological processes options under the conditions of interval presentation of local criteria. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2023. No. 2 (24). P. 16–26. URL: <https://journals.uran.ua/itssi/article/view/285493> (accessed: 12.09.2023).
28. Beskorovainyi V., Kolesnyk L. Interval model of multi-criterion task of reengineering physical structures of distributed databases. *Intelligent information systems for decision support in project and program management: collective monograph*. Riga: ISMA, 2021. P. 7–14. URL: <https://doi.org/10.30837/MMP.2021.007> (accessed: 19.09.2023).
29. Beskorovainyi V., Imanhulova Z. Technology of large-scale objects system optimization. *ECONTECHMOD*. 2017. Vol. 06. №4. P. 3–8. URL: <https://bibliotekanauki.pl/articles/410841> (accessed: 19.09.2023).

**Безкоровайний Володимир Валентинович**<sup>1</sup>, д.т.н., проф., каф. системотехніки, тел.: +38 050-983-03-29, [vladimir.beskorovainyi@nure.ua](mailto:vladimir.beskorovainyi@nure.ua),  
**Русскін Володимир Михайлович**<sup>2</sup>, к.т.н., доц., каф. інформатики, тел.: +38 050-302-55-98, [v\\_russkin@ukr.net](mailto:v_russkin@ukr.net),  
**Тітов Сергій Володимирович**<sup>1</sup>, к.т.н., доц., каф. системотехніки, тел.: +38 067-570-61-48, [serhii.titov@nure.ua](mailto:serhii.titov@nure.ua).

<sup>1</sup>Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки, 14, м. Харків, 61166, Україна.  
<sup>2</sup>Харківська гуманітарно-педагогічна академія, пер. Руставели, 7, м. Харків, 61000, Україна.

### Mathematical model of the problem of optimizing logistics networks under conditions of interval determination of input data

**Abstract. Problem.** *In the conditions of rapid changes in demand and supply in transportation markets, there is a need for corresponding changes in logistics technologies and networks, which are carried out through their reengineering. Existing mathematical models for the optimization of logistics networks are designed for conditions with point-wise, clearly defined input data, which does not allow obtaining solutions resistant to changes in the external environ-*

*ment. This determined the relevance of the scientific and applied task of developing mathematical models of multi-criteria optimization problems of logistics networks for the conditions of interval submission of input data. Goal.* The goal is to increase the efficiency of the logistics network optimization technology at the stage of re-engineering by developing a mathematical model of the multi-criteria optimization problem for the conditions of interval submission of input data. **Methodology.** According to the results of the decomposition of the problem of system optimization of logistics networks as the most complex defined task of their structural and topological optimization. When developing the model, the methodology of system design of territorially distributed objects, methods of multi-criteria optimization, theories of utility and decision-making were used. The apparatus of interval mathematics was used to compare solution options with vaguely specified input data. **The results.** The result are the formulated and completed formalization of the task of optimizing logistics networks as territorially distributed objects. The relationship for the objective function and constraints of the optimization task of topological structures of centralized three-level logistics networks is proposed. **Originality.** A mathematical model of the task of reengineering topological structures of centralized three-level logistics networks according to cost and efficiency indicators for interval defined input data and values of local criteria using comparison indices based on the Hukuhara difference has been developed. **Practical value.** The obtained results make it possible to increase the reliability of optimization results in the processes of design, development planning and reengineering of logistics networks, to obtain variants of the construction of their topological structures that are resistant to changes in external conditions.

**Volodymyr Beskorovainyi**<sup>1</sup>, Doctor of Engineering Sciences, Professor, System Engineering Department, tel.: +38050-983-03-29, [vladimir.beskorovainyi@nure.ua](mailto:vladimir.beskorovainyi@nure.ua),

**Volodymyr Russkin**<sup>2</sup>, Phd, Associate Professor, Informatics Department, tel.: +38 050-302-55-98, [v\\_russkin@ukr.net](mailto:v_russkin@ukr.net).

**Serhiy Titov**<sup>1</sup>, Phd, Associate Professor, System Engineering Department, tel.: +38 095-885-33-89, [serhii.titov@nure.ua](mailto:serhii.titov@nure.ua).

<sup>1</sup>Kharkiv National University of Radio Electronics, Nauky Ave. 14, Kharkiv, 61166, Ukraine.

<sup>2</sup>Kharkiv Humanitarian and Pedagogical Academy, Rustaveli Lane, 7, Kharkiv, 61000, Ukraine.