УДК 531/534(075.8) **DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2023.101.1.183**

ПЕРЕВАГИ ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНИХ МЕТОДІВ ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ МЕХАНІКИ В ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Біловол О. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Основні поняття, концепції, принципи механіки в закладах вищої технічної освіти викладаються переважно від простого до складного, що певною мірою повторює курс з історії механіки. В умовах сьогодення від системи освіти вимагається урахування сучасних тенденцій у науковій і інженерній сферах. Використання геометричних за своїм змістом методів векторної алгебри та векторного аналізу як основи вивчення механіки втрачає свою актуальність. Такий підхід певною мірою заважає використанню багатовимірних просторів (конфігурацій і фазового простору), тензорної алгебри, комп'ютерних технологій у процесі моделювання складних механічних систем. Аналітичні (координатні) методи позбавлені цих недоліків і побудовані на матричному формалізмі. Користуючись матричним апаратом, можна визначати й навіть отримувати основні рівняння механіки, розв'язувати практичні задачі навіть без вивчення класичних методів.*

Ключові слова: *методика викладання механіки, матричні методи, канонічні рівняння, фазовий простір.*

Вступ

Одним із найактуальніших завдань підготовки фахівців з наукової та інженерної діяльності є застосування найсучасніших методів й універсальних підходів під час викладання фізико-математичних дисциплін, зокрема механіки.

Розвиток математики та підвищення рівня її викладання призвів до того, що математичні моделі фізичних явищ стали більш абстрактними. Рух фізичних систем найкраще розглядати не в фізичному тривимірному просторі, який вміщує матеріальні тіла, а в багатовимірних або навіть нескінченновимірних просторах [2] через часткові або загальні обмеження, що накладаються на рух системи. Так, обмеження на швидкість поширення взаємодії призвело до впровадження простору-часу, а використання узагальнених координат дозволило розглядати рух системи в просторі конфігурацій [3]. Таким чином, відбувається перехід від матеріального світу, формою буття якого є тривимірний фізичний простір, до нематеріального світу, що породжений фізичною системою.

З огляду на це використання геометричних за своїм змістом методів векторної алгебри та векторного аналізу як основи вивчення механіки, незважаючи на їхню показовість, втрачає свою актуальність. Розвиваються методи, побудовані на матричному формалізмі. Матричний апарат, який застосовується у квантовій механіці й дуже обмежено в класичній, дозволяє користуватися перевагами переходу до фазового простору для отримання канонічних рівнянь і під час розв'язання задач динаміки твердого тіла.

Актуальність матричних методів підтверджує багаторічний досвід викладання механіки автором цієї розвідки, його участь у комісіях міжнародних студентських олімпіад і конкурсах студентських наукових робіт

Аналіз публікацій

Історично виникла й використовується в освіті значна кількість майже еквівалентних принципів (інтегральних і диференціальних), на яких можливо побудувати механіку [2, 4].

Декартову систему координат можна поширити на абстрактні багатовимірні простори, простір конфігурацій і фазовий простір, які здебільшого використовуються під час аналізу руху систем матеріальних точок. Кількість осей у цих просторах дорівнює кількості незалежних координат, і кожному положенню або стану системи відповідають координати певної точки цього простору. Однак не існує фізичного експерименту, який дозволив би визначити точні значення координат або швидкостей усіх точок системи через їхню значну кількість і недосконалість вимірювань. Тому необхідні інші способи визначення, з яких найбільш поширеним є ймовірнісний підхід. Розглядається певний клас ідентичних систем (ансамбль Гіббса), які знаходяться в різних станах [5]. Відсутність обмежень на кількість таких систем визначає їх розподіл у просторі як безперервний, вводиться густина вірогідності, яка дозволяє визначити вірогідність знаходження системи в певній області відповідного простору.

У зв’язку з цим у роботі розглядаються універсальні закони природознавства, які є основними в ієрархії законів, наприклад, закон збереження матерії, що є генератором загальних законів природи, або закон переходу кількості в якість [1].

Запропонований підхід передбачає використання матричного апарата [1,5], який за обсягом і складністю відповідає програмам з вищої математики для технічних навчальних закладів.

Мета та постановка завдання

Метою є розширення сфери застосування матричного формалізму на нескінченновимірні простори, обґрунтування його проти інших підходів, які використовуються під час викладання основ механічних дисциплін, та демонстрація його можливостей у процесі розв’язання складних практичних задач щодо моделювання та використання комп’ютерних технологій.

Методологічною основою для вибору матричних методів є використання нескінченновимірних та абстрактних просторів під час вивчення руху механічних систем. Принципова неможливість точного аналізу стану механічної системи вимагає застосування статистичних методів моделювання та поширення на ці моделі так званого закону збереження матерії.

Закон збереження матерії можна записати як рівняння балансу певної субстанції (фізичної величини), зміст якого полягає в тому, що кількість субстанції у цьому об’ємі середовища може змінитися тільки в разі надходження її крізь поверхню цього об’єму або за умови існування внутрішнього джерела. Немає жодних заперечень щодо вибору простору, в якому розглядається рівняння балансу, воно може бути, наприклад, нескінченновимірним. Немає також обмежень у виборі субстанції і середовища, наприклад, вони можуть мати довільні одиниці вимірювання й властивості. Рівняння балансу, до якого належить густина субстанції f в об’ємі частки середовища V, потік субстанції F крізь поверхню частки S, а також інтенсивність джерела j можна записати так:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V f dV\right) = \int_S \mathbf{F} d\mathbf{S} + \int_V j dV.$$

У кожному конкретному випадку його зміст потребує додаткового уточнення.

Ліва частина рівняння є швидкістю зміни кількості певної субстанції в об’ємі частки середовища, що відбувається в процесі взаємодії із зовнішнім оточенням або між внутрішніми складовими. Відповідно, права частина залежить від характеристик цієї взаємодії, наприклад від потенціалів полів.

Матричний формалізм і канонічні рівняння механіки

Положення механічної системи у просторі конфігурацій можна записати як у декартових координатах за допомогою радіус-вектора $\mathbf{r}$, так і за допомогою узагальнених координат, кількість яких дорівнює кількості ступенів вільності системи, за допомогою радіус-вектора $\mathbf{q}$.

У випадку голономних в’язей

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t).$$

Інтервал уздовж траєкторії між близькими послідовними положеннями точки механічної системи у нескінченновимірному просторі конфігурацій можна записати, квадратичними формами

$$dl^2 = d\mathbf{r}\mathbf{M}d\mathbf{r} = d\mathbf{q}\mathbf{G}d\mathbf{q},$$

залежно від координат, які використовуються. Диференціали $d\mathbf{r}$ і $d\mathbf{q}$ – нескінченні рядки, якщо записані у формулі праворуч, або стовпчики, якщо записані у формулі ліворуч. Діагональна матриця $\mathbf{M}$ складається з мас часток системи і пов’язана з матрицею інерції співвідношенням

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}},$$

де $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ – матриця перетворення координат.

Інтервал вздовж траєкторії між близькими послідовними положеннями точки, яка є елементом механічної системи в нескінченновимірному фазовому просторі, можна записати користуючись матричним формалізмом як квадратичні форми:

$$ds^2 = d\mathbf{r}d\mathbf{p} = d\mathbf{q}d\mathbf{p},$$

де залежно від координат, які використовуються, імпульс механічної системи

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}.$$

Записуємо частину імпульсу, пов'язану з нестаціонарністю в'язей:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Якщо радіус-вектор $\mathbf{x}$ у фазовому просторі складається з послідовно розташованих координат й імпульсів точок, то

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{E}d\mathbf{x},$$

де матриця $\mathbf{E}$ складається з нульових і одиничних матриць, тобто

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Через принципову неможливість точного визначення стану механічної системи її рух розглядається як рух фазової рідини густиною ρ. Розглянемо рівняння балансу для радіус-вектора частки фазової рідини:

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H} + \mathbf{b}.$$

З огляду на консервативний тип системи, тобто

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = 0,$$

й однорідність фазового простору, тобто відсутність у ньому особливих точок, які можуть утворювати джерела $\mathbf{b}$, отримуємо

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H},$$

де матриця $\mathbf{H}$ є антисиметричною.
Отже:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{r}} = 0.$$

Крім того, для утворення скаляра

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(ds^2\right) = d\dot{\mathbf{r}}\mathbf{E}d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{H}\mathbf{E}d\mathbf{r}$$

добуток матриць $\mathbf{HE}$ повинен утворювати діагональну матрицю. Це можливо, якщо матриця

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{D}$ – діагональна матриця.

Оскільки рівняння руху не повинні залежати від порядку розташування узагальнених координат у рядку, всі елементи матриці $\mathbf{H}$ мають бути однаковими.

За цих умов рівняння руху можна записати так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},$$

де H – елемент матриці $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Спроєктуємо рівняння руху на простір конфігурацій і на простір імпульсів:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

З цих рівнянь можна отримати загальний вид функції H:

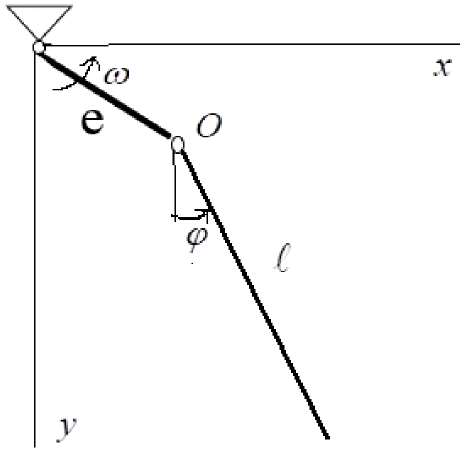
$$H = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p} - \mathbf{a}\right)\mathbf{G}^{-1}\left(\mathbf{p} - \mathbf{a}\right) + V\left(\mathbf{q}, t\right),$$

де $V\left(\mathbf{q}, t\right)$ – скалярний потенціал.

Отримані рівняння є канонічними, а функція H є функцію Гамільтона або механічною енергією, яка складається з кінетичної та потенціальної енергії (перша і друга складові суми).

Використання матричних методів у задачах динаміки

Як приклад використання матричних методів у задачах динаміки розглянемо рух однорідного стрижня, масою m і довжиною ℓ, який приєднаний до невагомого стрижня довжиною e в точці O. Невагомий стрижень рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω. Отримуємо рівняння руху системи матричним методом:



Маємо одну узагальнену координату φ.

Розділимо стрижень на нескінченну кількість однакових частин. У цьому разі положення системи в нескінченному просторі конфігурацій визначається вектором у вигляді рядка:

$$\mathbf{r} = \left(e\sin\omega t + n\sin\varphi, e\cos\omega t + n\cos\varphi\right),$$

де відстань частинки від точки O, позначена n, є індексом.

Отже, рядок

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = n\left(\cos\varphi, -\sin\varphi\right).$$

Матриця мас пропорційна одиничній матриці, тобто

$$\mathbf{M} = dm\mathbf{I},$$

а матриця інерції перетворюється на скаляр

$$G = \int n^2 dm = \frac{m\ell^2}{3}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = e\omega\left(\cos\omega t, -\sin\omega t\right),$$

отримуємо

$$\mathbf{a} = e\omega\cos\left(\varphi - \omega t\right)\int ndm =$$

$$= \frac{me\omega\ell}{2}\cos\left(\varphi - \omega t\right),$$

$$p = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi} + \frac{me\omega\ell}{2}\cos\left(\varphi - \omega t\right),$$

$$H = \frac{m\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 + V\left(\varphi, t\right),$$

де скалярний потенціал

$$V = -g\int ydm = -g\int e\cos\omega t + n\cos\varphi dm =$$

$$= -\frac{1}{2}mg\ell\cos\varphi.$$

Після підставляння до канонічних рівнянь отримуємо

$$\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}\omega\frac{e}{\ell}\sin\left(\varphi - \omega t\right)\left(\dot{\varphi} - \omega\right) + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0.$$

Для спрощення останнього рівняння вводиться нова узагальнена координата й нові константи за формулами

$$\psi = \varphi - \omega t, \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{e}{\ell}, k^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}.$$

Записуємо рівняння руху системи:

$$\ddot{\psi} - \varepsilon\omega\sin\psi\dot{\psi} + k^2\sin\left(\psi + \omega t\right) = 0.$$

Висновки

Матричний метод, який застосовується у квантовій механіці й дуже обмежено у класичній, дозволяє користуватися перевагами переходу до фазового простору для отримання канонічних рівнянь та для розв’язання задач кінематики й динаміки твердого тіла.

Автор пропонує вдосконалити матричний апарат, використовуючи як індекси геометричні параметри механічної системи. Тобто використовуються нескінченновимірні матриці з дійсними коефіцієнтами.

Запропонований метод дозволяє ефективно розв’язувати задачі механіки абсолютно твердого тіла без використання будь-яких теорем загального курсу, залишаючись у межах стандартної математичної підготовки.

Література

1. Біловол О. В. Закони механіки й універсальні закони природи. Вісник Харківського автомобільно-дорожнього університету: сб. наук. тр. 2013. Вип. 60. С. 148–153.
2. *Єжов С. М., Макарець М В., Романенко О. В.* Класична механіка. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. 480 с.
3. *Іро Г.* Класична механіка. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 1999. 464 с.
4. Біловол О. В. Сучасна фізика як новітня натуральна філософія. Харків: ФОП Панов А. М., 2019. 116 с.
5. *Федорченко А. М.* Теоретична механіка. Киъв: Вища школа, 1975. 516 с.

References

1. Belovol A. V. Zakony mehaniki i univer-salnye zakony prirody. Vestnik Harkovskogo avtomobilno-dorozhnogo universiteta: sb. nauch. tr. 2013. Vyp. 60. S. 148–153.
2. Yezhov S. M., Makarets M. V., Romanenko O. V. Classical mechanics. Kyiv: VOC "Kyiv University", 2008. 480 p.
3. Iro G. Classical mechanics. Lviv.: LNU named after Ivan Franko, 1999. 464 p
4. Belovol A. V. Suchasna fizika yak novitnya naturalna filosofiya. Harkiv: FOP Panov A. M., 2019. 116 s.
5. Fedorchenko A. M. Theoretical Mechanics. Kyiv: Higher School, 1975. 516 p.

Біловол Олександр Васильович, к.т.н., доц. каф. деталей машин та теорії машин і механізмів, тел. +38 095-537-17-74, avbelovol58@gmail.com,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет, *вул. Ярослава Мудрого, 25*, м. Харків, 61002, Україна.

Benefits of using matrix methods in teaching mechanics in higher education institutions

Abstract. Problem. *Basic concepts, concepts, principles of mechanics are mainly taught from simple to complex in institutions of higher technical education, which to some extent resembles a course on the history of mechanics. In today's conditions, the education system is required to take into account current trends in scientific and engineering fields. The use of inherently geometric methods of vector algebra and vector analysis as a basis for studying mechanics is losing its relevance. To a certain extent, this approach interferes with the use of multidimensional spaces (configurational and phase), tensor algebra, and computer technologies in modeling complex mechanical systems.* ***Goal.*** *The goal is to expand the field of application of the matrix formalism to infinite-dimensional spaces, justify its advantages compared to other approaches used in teaching the basics of mechanical disciplines, and demonstrate its capabilities in solving complex practical problems, both in terms of modeling and in terms of using computer technologies.* **Methodology**. *The methodological basis for choosing matrix methods is the use of infinite-dimensional and abstract, in physical terms, spaces when studying the movement of mechanical systems. The fundamental impossibility of accurately describing the state of a mechanical system requires the use of statistical modeling methods and the extension of the so-called law of conservation of matter in the form of a balance equation to these models.* ***Results.*** *It is shown that the matrix method, which is widely used in quantum mechanics and very limited in classical mechanics, allows you to use the advantages of the transition to phase space when obtaining canonical equations and when solving problems of kinematics and dynamics of a solid body.* ***Originality.*** *The paper proposes certain improvements of the matrix apparatus, related to the use of geometric parameters of the mechanical system as indexes. That is, infinite-dimensional matrices with real coefficients are used.* ***Practical value.*** *The proposed method allows you to effectively solve the problems of the mechanics of an absolutely rigid body without using any theorems of the general course, remaining within the limits of standard mathematical training.*

Key words: *mechanics teaching methodology, matrix methods, canonical equations, phase space.*

Belovol Oleksandr, Ph.D., Assoc. Prof., Department of Machine Components and Theory of Mechanisms and Machines, tel. +38 095-537-17-74, avbelovol58@gmail.com,
Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.