

УДК 621.432:693.542

DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2022.97.0.131

## МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПЕРИСТАЛЬТИЧНОМУ НАСОСІ ДЛЯ БЕТОННОЇ СУМІШІ ЯК СЕРЕДОВИЩА БІНГАМА

Шатохін В. М.<sup>1</sup>, Гранько Б. Ф.<sup>1</sup>, Соболев В. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Харківський національний університет будівництва та архітектури

<sup>2</sup> Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

*Анотація.* Викладено результати досліджень із розроблення математичної моделі динамічних процесів у перистальтичному бетононасосі з гідроприводом. Модель створена у формі диференціального рівняння щодо кута повороту ротора насоса; містить основні геометричні, масові характеристики ротора, динамічну характеристику гідромотора, параметри шлангу, будівельної суміші як середовища Бінгама. Установлено важливі технологічні закономірності функціонування пристрою. Результати роботи перспективні в процесі модернізації наявних та в розробленні нових моделей перистальтичних насосів.

*Ключові слова:* перистальтичний бетононасос, динамічний процес, гідропривід, ротор насоса, ролик, рівняння Букінгема, середовище Бінгама.

### Вступ

Монолітне бетонування посідає одну з провідних позицій у сучасному будівництві. Добре зарекомендували в цій галузі перистальтичні бетононасоси. Створення пристроїв для виконання таких робіт, методів раціонального вибору їхніх параметрів є актуальним завданням. Одним із сучасних ефективних напрямів її розв'язання є адекватне моделювання динамічних процесів у зазначених механізмах. На сьогодні зусилля дослідників зосереджені на вирішенні окремих завдань, пов'язаних зі створенням нових моделей перистальтичних насосів. До них, зокрема, належать такі завдання: моделювання гідравлічної системи управління та високомоментного гідромотора; оцінювання витрати потужності на процес транспортування суміші та тиск нагнітання, яке має створювати бетононасос; оцінювання нерівномірності подачі суміші та швидкості руху суміші під час виходу з трубопроводу тощо.

### Аналіз публікацій

Нині є чимало літературних джерел, що містять відомості про перистальтичні насоси, в яких розглядаються конструкції насосів, їхні характеристики та сфери застосування [1; 2]. Водночас досліджень, присвячених теорії розрахунків насосів зазначеного типу й моделюванню динамічних процесів у них, незначна кількість.

У публікації [3] розглядаються технологічні можливості насоса, у праці [4] – аналізуються його гідравлічні характеристики, ро-

бота притискних роликів. Дослідження питання зниження пульсацій потоку суміші, що перекачується, розглянуто в статті [1]. Одним із способів зниження пульсацій може бути використання класичної методології управління з механізмом зворотного зв'язку [5]. У цьому разі, однак, зниження рівня пульсацій веде до зростання тиску розчину нагнітання.

Іншим чином знизити рівень пульсацій можна за допомогою підвищення кількості притискних роликів насоса, проте це знижує термін служби робочої частини шлангу корпусу насоса [6].

Питання пульсації потоку рідини та оптимізація його параметрів розглянуті в роботі [7]. Властивості досліджуваного середовища, однак, суттєво відрізняються від властивостей потоку суміші, що перекачується шланговим бетононасосом.

На сьогодні відсутні моделі динамічних процесів, які відображали б причини появи пульсацій і дозволяли оцінювати ступінь нерівномірності подачі суміші шланговим бетононасосом у трубопроводі.

У статті [8] як привод розглядається аксіально-поршневий гідромотор. Наведено докладну математичну модель гідросистеми, в якій живлення насоса здійснюється від аксіально-поршневого насоса, проте модель не враховує вплив суміші, що переміщується в трубопроводі.

Математична модель сучасного мобільного бетононасоса наведена в роботі [9], але як виконавчий механізм у цьому пристрої використовується гідроциліндр.

У низці літературних джерел містяться відомості про безпоршнєві шлангові насоси [10; 11]. У зазначених працях розглядаються конструкції насосів, їхні характеристики та сфери застосування. До того ж питання, присвячені їхньому походженню, а також теорії розрахунку насосів цього типу подані дуже обмежено.

У роботі [12] створена математична модель динамічних процесів у перистальтичному бетононасосі з гідравлічним приводом, в якій суміш, що переміщується, розглядається як ньютонівська рідина. У багатьох випадках, однак, суміші – не ньютонівські рідини, зокрема бінгамівські пластичні рідини [13–15]. У них швидкість зсуву в кожній точці є деякою функцією напруження в тій самій точці. Поняття ідеалізованої бінгамівської рідини зручне для практики, оскільки багато реальних рідких сумішей дуже близькі до цього типу: будівельні, бетонні суміші, бітуми (у певному інтервалі температур), бурові розчини, масляні фарби тощо. Роботи [16–18] присвячені дослідженням течії реологічно складних середовищ.

У статті викладені результати досліджень зі створення більш досконалих моделей динамічних процесів у перистальтичних насосах з урахуванням того, що суміші в багатьох випадках є середовищем Бінгама.

#### Мета й постановка завдання

*Мета роботи* – створення універсальних математичних моделей динамічних процесів у перистальтичному бетононасосі з гідроприводом для визначення технологічних якостей пристрою, вибору його раціональних параметрів. Моделі мають містити основні геометричні, масові характеристики ротора, динамічну характеристику гідромотора, параметри шлангу, будівельної суміші, зокрема й середовища Бінгама, що зумовлено потребами модернізації наявних і розроблення нових моделей насосів.

*Для досягнення поставленої мети мають бути виконані такі завдання:* розроблено метод формування моменту опору на роторі насоса від роликів, що деформують шланг; побудовано залежність перепаду тиску від кутової швидкості ротора для визначення сили опору руху суміші з допомогою рівняння Букінгема; створено нелінійну модель сили опору руху середовища Бінгама; отримано вираз для сил опору, обумовлених силами ваги частинок суміші під час її підйому; побудовано модель моменту гідромотора як

функції кутової швидкості його ротора з використанням даних каталогу; проведено розрахункові дослідження закономірностей динамічних процесів у насосі за допомогою розроблених універсальних моделей.

#### Математична модель шлангового бетононасоса з гідравлічним приводом

Розрахункова схема бетононасоса показано на рис. 1. Прийнято такі позначки: 1 – вал насоса; 2 – обойма; 3 – центральний (притисний) ролик; 4 – бічний (натискний) ролик; 5 – пристрій для зміни радіуса контакту поверхонь роликів зі шлангом 6; 7 – будівельна суміш; дуговою стрілкою позначено напрям обертання ротора.

Літерні позначки:  $d$  – діаметр шлангу (внутрішній);  $h$  – товщина стінки шлангу;  $D$  – діаметр шлангу (зовнішній);  $R$  – радіус корпусу насоса по внутрішній стінці;  $R_1$  – радіус, що дорівнює відстані між центрами ротора та центрального ролика;  $R_2$  – радіус, рівний відстані між центрами ротора й бічного ролика;  $R_C$  – радіус осі вигнутої частини шлангу;  $d_0$  – діаметр центрального та бокового роликів;  $\alpha$  – кут між центральним та бічним роликами;  $\varphi$  – напрямом відліку кута, що визначає положення ротора (відраховується від вертикалі проти ходу годинникових стрілок).

*Момент сил опору від перекочування роликів по шлангу.* Побудова динамічної моделі ротора насоса вимагає побудови залежностей моментів сил, прикладених до ротора, від його кута повороту. Для формування моменту сил опору від перекочування роликів по шлангу необхідно мати кути, які утворюють відрізки, що з'єднують центри мас ролика й ротора, у момент контакту ролика зі шлангом (рис. 2). За допомогою зазначеної схеми та очевидних геометричних співвідношень маємо для кутів:

$$\beta_i = \arcsin \frac{R - D - \frac{d_0}{2}}{R_i};$$

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2} - \beta_i \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

У цих формулах індекс  $i = 1$  відповідає центральному ролику,  $i = 2$  – бічному. Зазначимо, що такими самими за модулем будуть і кути, що відповідають моменту втрати контакту роликів зі шлангом.

Наведені міркування дозволяють стверджувати, що процес зміни моменту опору, який перешкоджає перекочуванню ролика, під час повороту ротора передбачає три етапи: наростання деформації шлангу від нако-

чування ролика; витіснення розчину за умови максимальної деформації шлангу; зменшення деформації шлангу на «виході» ролика з контакту зі шлангом.

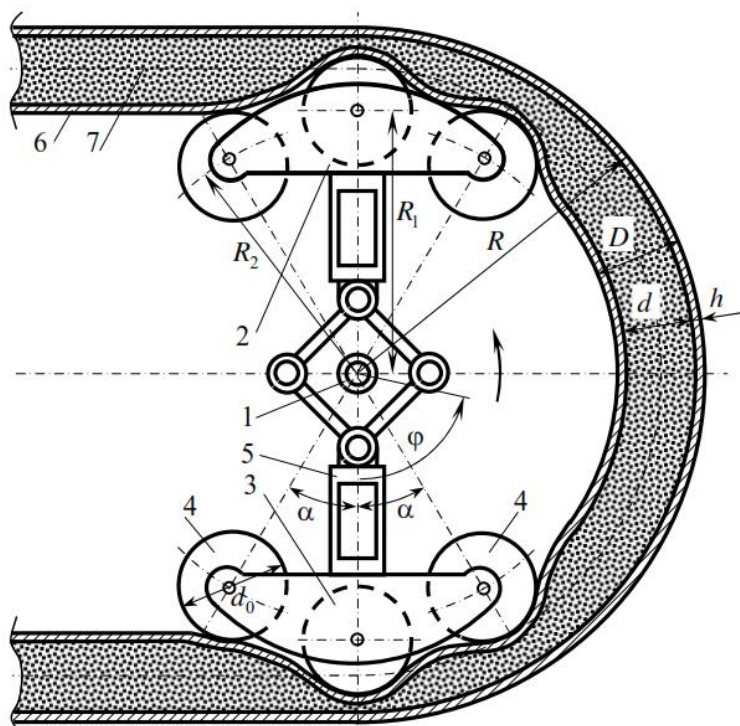


Рис. 1. Розрахункова схема бетононасоса

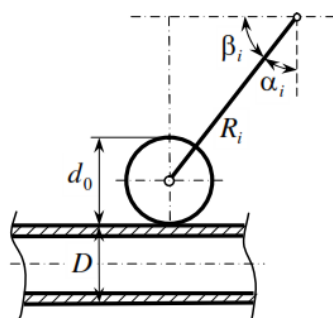


Рис. 2. Схема визначення кутів контакту роликів зі шлангом

Задля збереження традиційної форми подання максимального моменту сил опору у вигляді [19]

$$M_{\text{пр}} = Nf_k \quad (2)$$

виявилось доцільним ці три етапи в розробленні моделі віднести до характеру зміни коефіцієнта тертя кочення  $f_k$ , а нормальну складову реакції шлангу (силу нормального тиску)  $N$  прийняти постійною.

Графік залежності коефіцієнта тертя для центрального ролика показано на рис. 3, коли його максимальне значення  $\delta_1 = 2\text{см}$ .

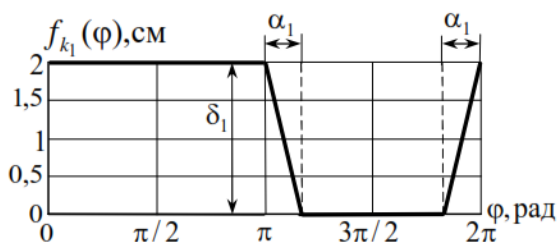


Рис. 3. Залежність коефіцієнта тертя кочення центрального ролика від кута повороту ротора

Аналогічні графіки для бічних роликів показано на рис. 4 і 5, коли максимальний коефіцієнт тертя  $\delta_2 = 1\text{см}$ .

Якщо не враховувати зміщення щодо горизонтальної осі, якісно характер зміни коефіцієнта тертя на всіх трьох графіках однаковий. Зміщення ж пов'язані з тим, що лівий бічний ролик «відстає» від центрального на

кут  $\alpha$ , а правий – відповідно «випереджає» на кут  $\alpha$  (див. рис. 1).

$$f_{k_i}(\varphi) = \begin{cases} \delta_i, & \varphi \leq \pi; \\ \delta_i \left( \frac{\pi - \varphi}{\alpha_i} + 1 \right), & \pi < \varphi < \pi + \alpha_i; \\ 0, & \pi + \alpha_i \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha_i; \\ \delta_i \left( \frac{\varphi - 2\pi}{\alpha_i} + 1 \right), & 2\pi - \alpha_i < \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

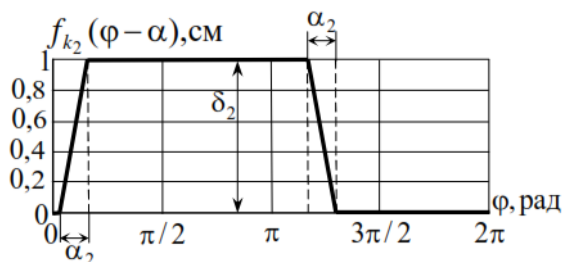


Рис. 4. Залежність коефіцієнта тертя кочення лівого бокового ролика від кута повороту ротора

Закони зміни коефіцієнта тертя кочення на інтервалах входу та виходу ролика з контакту з деформованим шлангом прийнято лінійними. Це не знижує загальності запропонованої моделі: по-перше, зазначені інтервали становлять незначну частину від повного обертут ротора, тому ефект від урахування нелінійного характеру цієї залежності буде незначним; по-друге, урахування такої залежності, наприклад, отриманої розрахунковим або експериментальним шляхом, за умови програмної реалізації алгоритму не становить жодних труднощів.

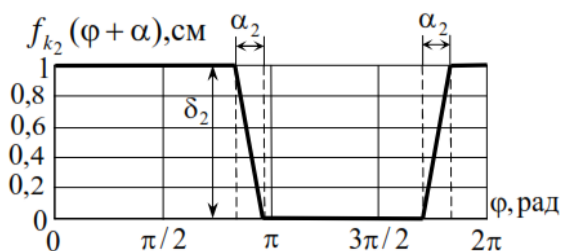


Рис. 5. Залежність коефіцієнта тертя кочення правого бокового ролика від кута повороту ротора

На рис. 6 наведена допоміжна схема, що пояснює перетворення моменту опору перекочування центрального ролика  $M_{тр1}$  до моменту опору обертанню ротора  $M$ .

Зазначені кусково-лінійні функції аналітично описуються виразом

На цьому рисунку  $T_1$  – рушійна сила, прикладена до осі ролика;  $T'_1$  – сила, прикладена до ротора (модулі цих сил однакові  $T'_1 = T_1$ );  $G_1$  – сила притискання ролика;  $N_1$ ,  $F_{тр1}$  – відповідно нормальна реакція шлангу й сила тертя, що діє з боку шлангу на ролик.

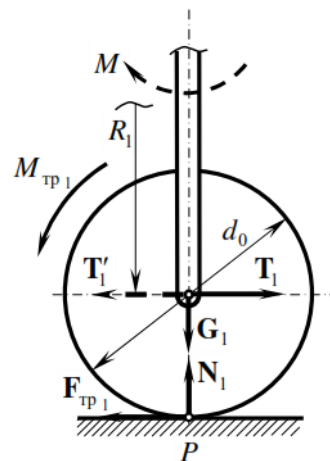


Рис. 6. Момент опору на роторі під час перекочування ролика

Для сили, що прикладена до ротора, з урахуванням (3) маємо

$$T_1(\varphi) = \frac{M_{тр1}(\varphi)}{\frac{d_0}{2}} = \frac{G_1 \cdot f_{k_1}(\varphi)}{\frac{d_0}{2}}. \quad (4)$$

Тоді

$$M(\varphi) = T'_1(\varphi) \cdot R_1 = T_1(\varphi) \cdot R_1. \quad (5)$$

Тепер сумарний момент опору на роторі від трьох роликів нижньої обойми на підставі формул (2)–(4) (див. рис. 1)

$$M_1(\varphi) = \frac{G_1 \cdot f_{k_1}(\varphi)}{\frac{d_0}{2}} \cdot R_1 + \frac{G_2 \cdot f_{k_2}(\varphi - \alpha)}{\frac{d_0}{2}} \cdot R_2 +$$

$$+ \frac{G_2 \cdot f_{k_2}(\varphi + \alpha)}{\frac{d_0}{2}} \cdot R_2. \quad (6)$$

Два останніх доданків у формулі (6) відповідають моментам опору від лівого та правого бічних роликів.

Вираз моменту опору від роликів верхньої («випереджальної») обойми буде відрізнятися від (6) збільшеним на  $\pi$  значенням аргументу

$$M_2(\varphi) = M_1(\varphi + \pi). \quad (7)$$

Тоді сумарний момент опору на роторі від перекочування роликів буде

$$M_k(\varphi) = M_1(\varphi) + M_2(\varphi). \quad (8)$$

На рис. 7 представлені графіки сумарного моменту опору та його складників, коли  $G_1 = 100\text{Н}$ ,  $G_2 = 50\text{Н}$ .

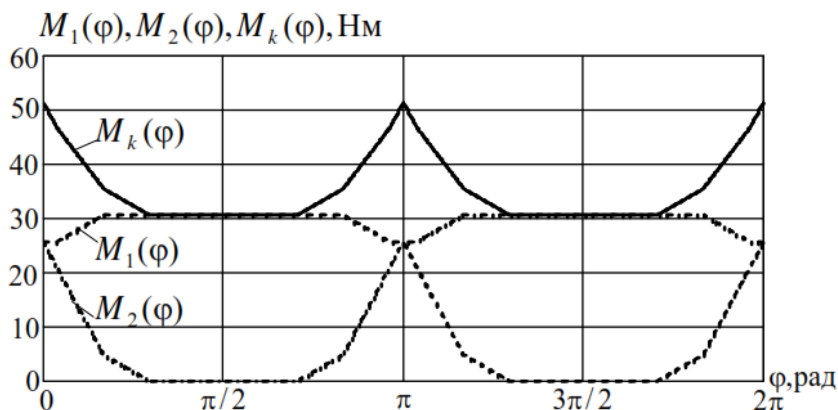


Рис. 7. Сумарний момент опору на роторі  $M_k(\varphi)$  ( $M_1(\varphi)$ ,  $M_2(\varphi)$  – моменти опору від нижньої та верхньої обойми)

**Сили опору руху суміші в шлангу.** На технологічні характеристики насоса значний вплив мають сили опору руху суміші в шлангу. У разі ньютонівської рідини зазначені сили отримані в роботі [12] з використанням формули втрати напору (тиску) за ламінарної течії рідини в круглій трубці довжини  $l$ . Створення більш досконалих моделей динамічних процесів у зазначених пристроях вимагає врахування того, що в багатьох випадках суміші – не ньютонівські рідини, зокрема бінгамівські пластичні рідини. Для них сили опору набувають нелінійного характеру. До цього можна дійти в такий спосіб.

Відомо, що для ламінарного потоку ньютонівської рідини [13] (рис. 8)

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}, \quad (9)$$

де  $\tau$  – дотичне напруження зсуву на радіусі  $r$ ;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості;  $\frac{du}{dr}$  – похідна швидкості в напрямку радіуса (швидкість зсуву сусідніх шарів рідини – зі зростанням  $r$  швидкість зменшується).

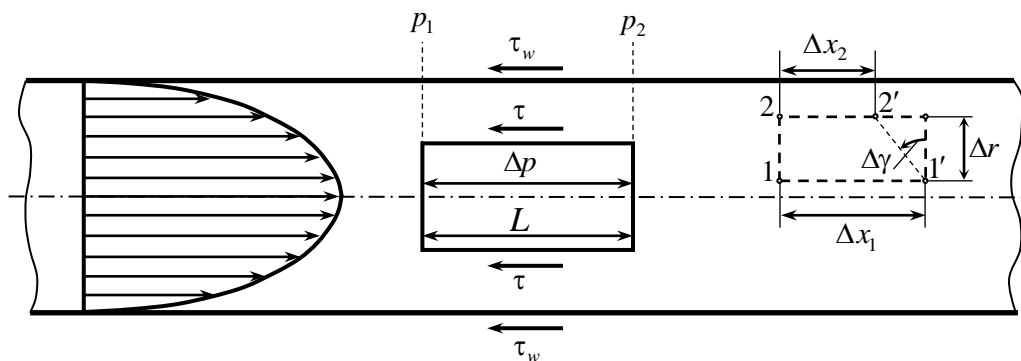


Рис. 8. Побудова залежності швидкості зсуву  $\dot{\gamma}$  від дотичних напружень  $\tau$

Точки 1, 2 лежать на прямій перпендикулярній швидкості (див. рис. 8). За час  $\Delta t$  точки зрушують відповідно на  $\Delta x_1$  і  $\Delta x_2$ . Зсув дорівнюватиме

$$\Delta \gamma = \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\Delta r}.$$

Виконуючи ділення обох частин на  $\Delta t$ , отримаємо

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x_2}{\Delta t} - \frac{\Delta x_1}{\Delta t}}{\Delta r}.$$

Ураховуючи те, що швидкості потоку у двох точках, які лежать на відстані  $\Delta r$ , рівні  $\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = u_1$  і  $\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = u_2$ , переходячи до границі, маємо:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{du}{dr}. \quad (10)$$

Знак мінус у формулі (10) обумовлений тим, що зі зростанням  $r$  швидкість зменшується  $\frac{du}{dr} < 0$ . Якщо додатним напрямком відліку кута вважати напрямком проти ходу годинникової стрілки (див. рис. 8), то справді приходимо до формули (10).

З урахуванням (10) формула (9) набуває вигляду

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu}. \quad (11)$$

Якщо властивості рідини не залежать від часу, то реологічне рівняння, що зв'язує дотичне напруження та швидкість зсуву  $\dot{\gamma}$ , у загальному випадку записується у вигляді [13]

$$\dot{\gamma} = f(\tau).$$

Для течії в трубці з урахуванням (10) маємо (див. рис. 8)

$$-\frac{du}{dr} = f(\tau). \quad (12)$$

Умови рівноваги сил, що діють на циліндричний елемент рідини радіуса  $r$  та довжини  $L$  (див. рис. 8), визначає вираз

$$2\pi r L \tau = \pi r^2 \Delta p,$$

де  $\Delta p = p_2 - p_1$  – перепад тиску.

З останнього виразу випливає

$$\tau = \frac{r \Delta p}{2L}.$$

Для напруження тертя на стінці отримуємо

$$\tau_w = \frac{R \Delta p}{2L}. \quad (13)$$

Отже,

$$\tau = \tau_w \frac{r}{R} \quad (14)$$

і формула (12), записується у вигляді

$$-\frac{du}{dr} = f\left(\tau_w \frac{r}{R}\right).$$

Інтегрування дає

$$-\int_{u(r)}^{u(R)} du = \int_r^R f\left(\tau_w \frac{r}{R}\right) dr.$$

У разі допущення справедливості умов прилипання рідини на стінці (відсутність ковзання)  $u(R) = 0$ , тоді з останнього виразу випливає

$$u(r) = \int_r^R f\left(\tau_w \frac{r}{R}\right) dr. \quad (15)$$

Для витрати тепер маємо

$$Q = \int_0^R 2\pi r u(r) dr$$

або

$$Q = \pi \int_0^R u(r) d(r^2).$$

Оскільки  $u(R) = 0$ , а на підставі (15)

$du(r) = -f\left(\tau_w \frac{r}{R}\right) dr$ , то інтегрування частинами дає

$$Q = \pi \int_0^R r^2 f\left(\tau_w \frac{r}{R}\right) dr.$$

Підставивши з (14)  $r = R \frac{\tau}{\tau_w}$ , отримаємо

$$Q = \pi \frac{R^3}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

У разі ньютонівської рідини для ламінарного потоку на підставі (11)

$$f(\tau) = \frac{\tau}{\mu}. \quad (17)$$

Підставляючи в (16), отримаємо

$$Q = \pi \frac{R^3}{\mu \tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^3 d\tau, \quad (18)$$

і після інтегрування

$$Q = \frac{\pi R^3 \tau_w}{4\mu}. \quad (19)$$

Підстановка  $\tau_w$  з (13) приводить до відомого **рівняння Пуазейля** для ламінарного потоку ньютонівської рідини

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}. \quad (20)$$

Крива течії для **бінгамівських рідин** є прямою лінією, що перетинає вісь напруження зсуву на відстані  $\tau_y$  від її початку (рис. 9).

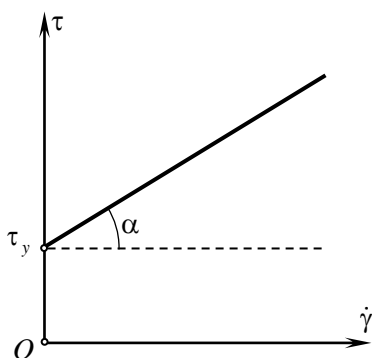


Рис. 9. Крива течії для бінгамівської рідини

Формулу (24) можна застосовувати, якщо

$$\tau_y < \tau_w = \frac{R\Delta p}{2L}.$$

Тоді переміщення середовища буде можливе, якщо

$$\Delta p > \frac{2L\tau_y}{R}.$$

Отже, граничне мінімальне значення перепаду тиску

$$\Delta p_{\min} = \frac{2L\tau_y}{R}; \quad (25)$$

переміщення середовища відсутнє; витрата  $Q(\Delta p_{\min}) = 0$ .

Тепер для середньої швидкості переміщення середовища [20] маємо з урахуванням (24)

$$v_{\text{cp}} = \frac{Q(\Delta p)}{\pi R^2}. \quad (26)$$

З іншого боку, для конструкції перистальтичного насоса (див. рис. 1) середньою швидкістю виправдано прийняти вираз

$$v_{\text{cp}} = \left( R_1 + \frac{d_0}{2} \right) \dot{\phi}, \quad (27)$$

де  $\dot{\phi}$  – кутова швидкість ротора насоса.

Порівняння правих частин формул (26) і (27) дозволяє записати вираз для кутової швидкості ротора насоса

$$\dot{\phi} = \frac{Q(\Delta p)}{\pi R^2 \left( R_1 + \frac{d_0}{2} \right)}. \quad (28)$$

Для сили опору руху середовища в шлангу має місце очевидна формула (див. рис. 1) [20]

$$F(\dot{\phi}) = \Delta p(\dot{\phi}) \cdot \pi R^2. \quad (29)$$

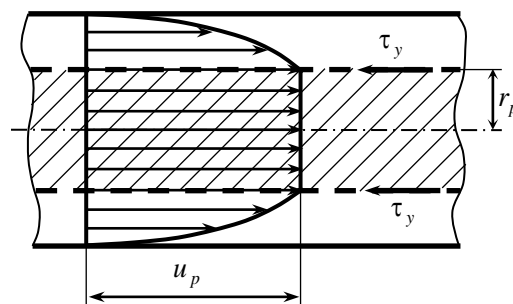


Рис. 10. Схема течії бінгамівської рідини

Вираз (28) неможливо аналітично розв'язати щодо  $\Delta p$ , тобто отримати залеж-

ність  $\Delta p = \Delta p(\phi)$ . Однак сучасні математичні пакети, зокрема MathCAD [22], дозволяють досить просто обійти зазначені труднощі, використовуючи інтерполяцію таблично заданих функцій. У розрахункових дослідженнях використовувалася кубічна сплайн-інтерполяція. Важливою обставиною в цьому разі є те, що отримані таким способом у середовищі MathCAD функції можна використовувати як традиційні, зокрема аналітично диференціювати.

Зручний такий варіант реалізації алгоритму. На рівномірній сітці значень перепадів тисків ( $h_p$  – крок по перепадах тисків)

$$\Delta p_i = \Delta p_{\min} + (i-1)h_p \quad (i = \overline{1, N})$$

за формулою (28) нараховуємо відповідні значення кутової швидкості  $\dot{\phi}_i$ . Тепер, розглядаючи  $\dot{\phi}_i$  як елементи вектора даних аргументу (мають бути розташовані за зростанням), а  $\Delta p_i$  як елементи вектора значень функції, за допомогою вбудованої функції інтерполяції будуємо потрібну функцію  $\Delta p(\phi)$ . У пакеті MathCAD для інтерполяції кубічними сплайнами використовується функція *interp* ( $s, x, y, t$ ).

Необхідно зазначити, що запропонований підхід легко поширюється на будь-які реальні рідини з нелінійною кривою течії.

**Узагальнена сила опору сил ваги частинок під час підйому суміші.** Характер динамічних процесів у насосі істотно залежить від висоти, на яку піднімається суміш. Побудова динамічної моделі у формі рівняння Лагранжа щодо кута повороту ротора передбачає знаходження узагальненої сили. Виявилось зручним ефект впливу сил ваги частинок суміші врахувати як компонент повної узагальненої сили. Робота сил ваги суміші залежить тільки від різниці висот кінців шлангу. Форма шлангу між крайніми точками не має значення, але маса переміщуваної суміші залежить від довжини шлангу (пропорційна його довжині). Тому для виведення вказаного виразу шланг можна прийняти прямолінійним (рис. 11).

Тоді елементарне вертикальне переміщення суміші визначиться з пропорції

$$\frac{\delta z}{R_C \delta \phi} = \frac{H_0}{l_0},$$

де  $R_C = R - \frac{D}{2}$ ;  $H_0 = H + 2R_C$  – сумарна висота підйому суміші;  $H$  – висота підйому кінця відвідної ділянки шлангу;  $2R_C$  – висота підйому суміші в корпусі насоса (див. рис. 1);  $l_0 = l_2 + \pi R_C$  – довжина шлангу, в якому є суміш, що піднімається;  $l_2$  – довжина відвідної ділянки шлангу;  $\delta \phi$  – узагальнене віртуальне переміщення ротора ( $\phi$  – кут повороту ротора).

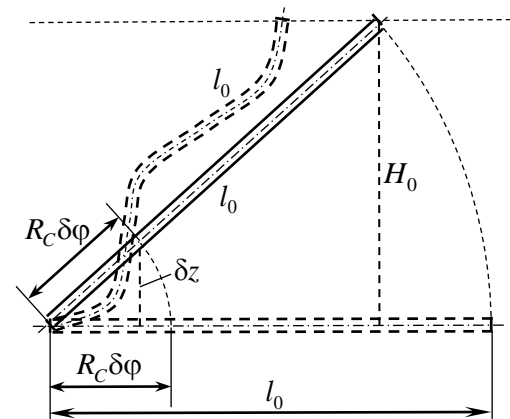


Рис. 11. Схема визначення узагальненої сили для сил ваги під час підйому суміші

Тепер для віртуальної роботи та узагальненої сили можна записати формули:

$$\begin{aligned} \delta A_{M_0} &= -M_0 g \cdot \delta z = -M_0 g \frac{H_0}{l_0} R_C \cdot \delta \phi = Q_{M_0} \delta \phi; \\ Q_{M_0} &= -M_0 g \frac{H_0}{l_0} R_C, \end{aligned} \quad (30)$$

де  $M_0 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l_0 \cdot \gamma$  – маса суміші, що піднімається;  $\gamma$  – щільність суміші;  $g$  – прискорення вільного падіння.

**Момент гідромотора як функція кутової швидкості ротора.** Для подання моменту гідромотора використані дані каталогу [21]. Характерні залежності моменту від частоти обертання ротора для різних витрат робочої рідини зображені на рис. 12. Витрати в літрах за хвилину (л/хв) вказані біля кожної кривої. Жирною лінією виділена крива, використана в розрахункових дослідженнях моделі експериментального пристрою.

На рис. 13 показаний результат її перебування в залежності моменту від кутової швидкості ротора.

**Динамічні моделі насоса.** Модель зручно подати у формі рівняння Лагранжа другого роду, використовуючи як узагальнену коор-



динату кут повороту ротора  $\varphi$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad (31)$$

де  $T = T(\varphi, \dot{\varphi})$  – кінетична енергія системи;  
 $Q_{\varphi} = Q_{\varphi}(\varphi, \dot{\varphi})$  – узагальнена сила.

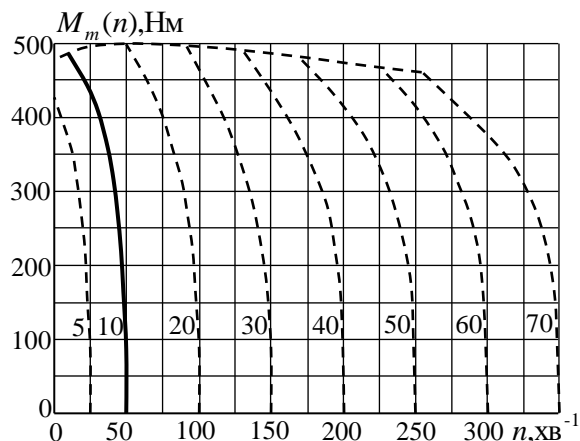


Рис. 12. Залежність моменту гідромотора від частоти обертання для різних витрат робочої рідини

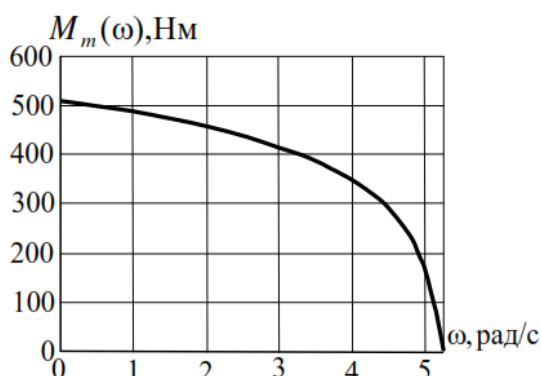


Рис. 13. Залежність моменту гідромотора від кутової швидкості ротора (витрата 10 л/хв)

Для отримання узагальненої сили складемо вираз віртуальної роботи сил, що діють на механічну систему,

$$\delta A = \left( M_m(\dot{\varphi}) - M_k(\varphi) - F(\dot{\varphi}) \cdot R_C - M_0 g \frac{H_0}{l_0} R_C \right) \cdot \delta \varphi, \quad (32)$$

де  $M_m(\dot{\varphi})$  – момент гідромотора, прикладений до ротора;  $M_k(\varphi)$  – сумарний момент опору на роторі від перекочування роликів;  $-F(\dot{\varphi}) \cdot R_C$  – еквівалентний момент опору,

обумовлений силами опору переміщенню суміші в шлангу (див. формулу (29));

$-M_0 g \frac{H_0}{l_0} R_C$  – еквівалентний момент опору,

обумовлений силами ваги частинок суміші, що піднімається (див. формулу (30)).

Вираз у дужках формули (32) і є узагальненою силою

$$Q_{\varphi}(\varphi, \dot{\varphi}) = M_m(\dot{\varphi}) - M_k(\varphi) - F(\dot{\varphi}) \cdot R_C - M_0 g \frac{H_0}{l_0} R_C. \quad (33)$$

Кінетична енергія ротора з роликами і суміші, що переміщається,

$$T = T_0 + 2T_1 + 4T_2 + T_3, \quad (34)$$

де  $T_0 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$  – кінетична енергія ротора;

$I$  – сумарний момент інерції роторів насоса (разом з обоймами) і мотора;

$T_1 = \frac{1}{2} m v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$  – кінетична енергія центрального ролика;

$v_{C1} = \dot{\varphi} R_1$  – швидкість центру мас центрального ролика;  $m$  – маса ролика;

$I_1$  – осьовий момент інерції ролика;

$\omega_1 = \frac{2v_{C1}}{d_0}$  – кутова швидкість центрального ролика;

$T_2 = \frac{1}{2} m v_{C2}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_2^2$  – кінетична енергія бокового ролика;

$v_{C2} = \dot{\varphi} R_2$  – швидкість центру мас бокового ролика;

$\omega_2 = \frac{2v_{C2}}{d_0}$  – кутова швидкість бокового ролика;

$T_3 = \frac{1}{2} M R_C^2 \dot{\varphi}^2$  – кінетична енергія суміші;

$M = \frac{\pi d^2}{4} l \gamma$  – маса суміші.

З урахуванням цього формула (34) для повної кінетичної енергії системи дає

$$T = \frac{1}{2} \left( I + 2 \left( m + \frac{4I_1}{d_0^2} \right) (R_1^2 + 2R_2^2) + M R_C^2 \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_e \dot{\varphi}^2, \quad (35)$$

де  $I_e$  – еквівалентний момент інерції

$$I_e = I + 2 \left( m + \frac{4I_1}{d_0^2} \right) (R_1^2 + 2R_2^2) + MR_C^2. \quad (36)$$

Якщо ролик можна прийняти за однорідний циліндр, то  $I_1 = \frac{1}{8}md_0^2$  і формула (36) спрощується

$$I_e = I + 3m(R_1^2 + 2R_2^2) + MR_C^2. \quad (37)$$

Після виконання операцій диференціювання кінетичної енергії (35) рівняння Лагранжа (31) з урахуванням (33) набуває вигляду

$$I_e \ddot{\varphi} = Q_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}). \quad (38)$$

Це і є диференціальне рівняння руху ротора, яке має інтегруватися з початковими умовами: за умови  $t=0$ ,  $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ .

### Розрахункові дослідження динамічних процесів

Створена універсальна математична модель динамічних процесів у перистальтичному бетононасосі покладена в основу алгоритму, реалізованого засобами математичного пакету MathCAD [22].

Дослідження за допомогою розробленої програми проводилися для таких значень параметрів бетононасоса:  $d = 5$  см;  $h = 1,5$  см;  $D = 8$  см;  $R = 32$  см;  $R_1 = 23,7$  см;  $R_2 = 21,8$  см;  $d_0 = 10$  см;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\delta_1 = 3,5$  см;  $\delta_2 = 2,5$  см;  $G_1 = 500$  Н;  $G_2 = 250$  Н;  $l_1 = 1$  м;  $l_2 = 10$  м;  $\mu = 4$  Па·с;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $m = 7,2$  кг;  $I = 2,56$  кг·м<sup>2</sup>;  $\gamma = 2300$  кг/м<sup>3</sup>.

На рис. 14 показані тимчасові залежності швидкості руху будівельної суміші для трьох значень висоти підйому кінця відповідної ділянки шлангу:  $H = 0$ ;  $H = 2,5$  м;  $H = 5$  м. Використовувалися такі значення пластичної в'язкості та границі текучості:  $\mu_p = 10$  Па·с;  $\tau_y = 50$  Па.

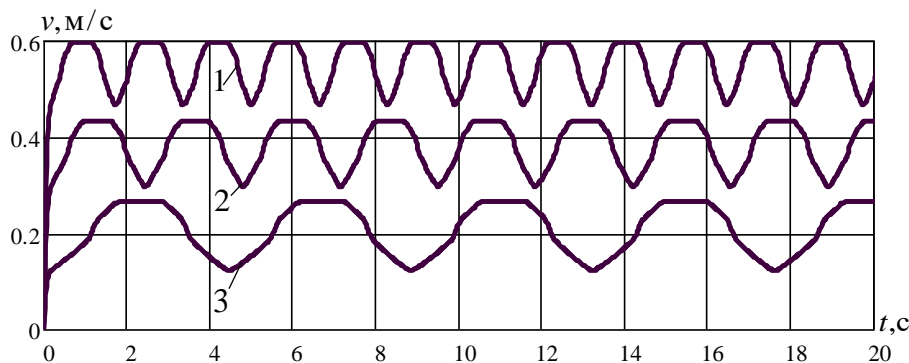


Рис. 14. Швидкість суміші залежно від часу (1 –  $H = 0$ ; 2 –  $H = 2,5$  м; 3 –  $H = 5$  м)

Збільшення висоти підйому веде до зменшення середньої швидкості руху суміші, частоти пульсацій (зменшується частота обертання ротора). У цьому разі розмахи пульсацій швидкості змінюються незначно. Істотним є вплив значень пластичної в'язкості та границі текучості на швидкість руху суміші. За тих самих параметрів насоса для ньютонівської рідини з динамічним коефіцієнтом в'язкості  $\mu = 4$  Па·с середня швидкість руху виявляється приблизно вдвічі більшою [12]. У процесі побудови графіків на рис. 15 варіювалися значення границі текучості:  $\tau_y = 0$ ;  $\tau_y = 50$  Па;  $\tau_y = 100$  Па. Деякі вихідні пара-

метри моделі були змінені:  $\mu_p = 4$  Па·с;  $H = 0$ ;  $l_2 = 10$  м. Аналіз графіків дозволяє зробити висновок, що суттєва зміна границі текучості несуттєво позначається на середній швидкості переміщення середовища. Набагато більший вплив на середню швидкість дає пластична в'язкість середовища.

Переконливим підтвердженням останнього твердження є графіки рис. 16. Криві 2 і 3, на відміну від відповідних кривих на рис. 15, отримані для збільшених значень пластичної в'язкості  $\mu_p = 6$  Па·с,  $\mu_p = 8$  Па·с, що стало причиною значного зменшення середньої швидкості руху середовища.

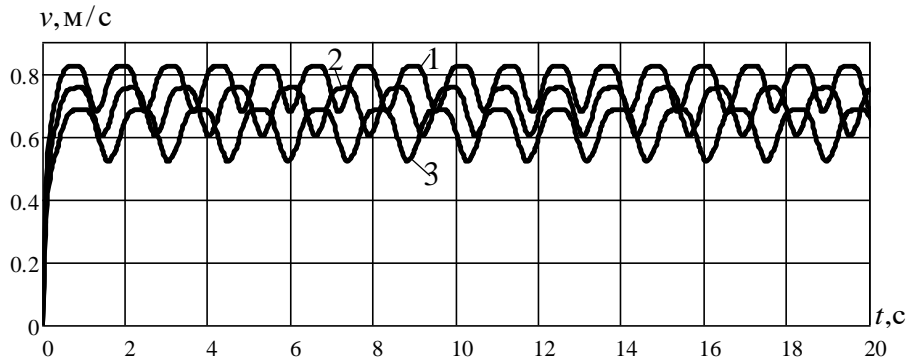


Рис. 15. Швидкість суміші залежно від часу (1 –  $\tau_y = 0$ ; 2 –  $\tau_y = 50 \text{ Па}$ ; 3 –  $\tau_y = 100 \text{ Па}$ )

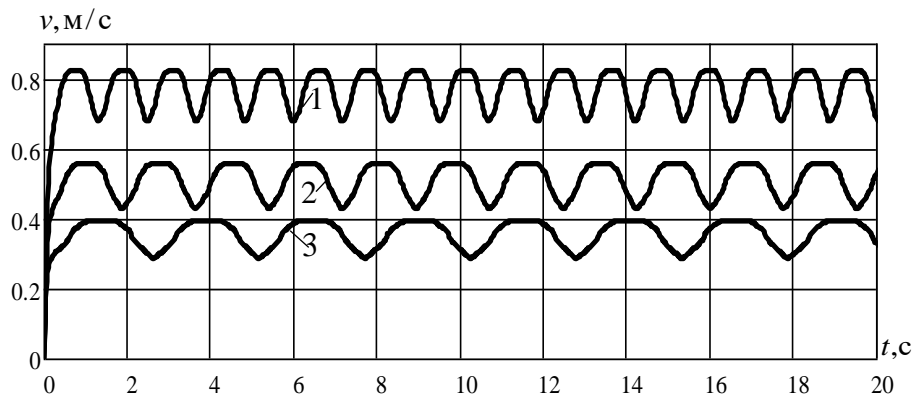


Рис. 16. Швидкість суміші залежно від часу (1 –  $\mu_p = 4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_y = 0$ ; 2 –  $\mu_p = 6 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_y = 50 \text{ Па}$ ; 3 –  $\mu_p = 8 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ;  $\tau_y = 100 \text{ Па}$ )

Досліджувався вплив збільшення потужності гідромотора на швидкість переміщення будівельної суміші. Крива, яка відповідає витраті робочої рідини 20 л/хв (див. рис. 12), попередньо була перебудована в залежність моменту гідромотора від кутової швидкості ротора (рис. 17), оскільки це було зроблено за умови витрати 10 л/хв (див. рис. 13).

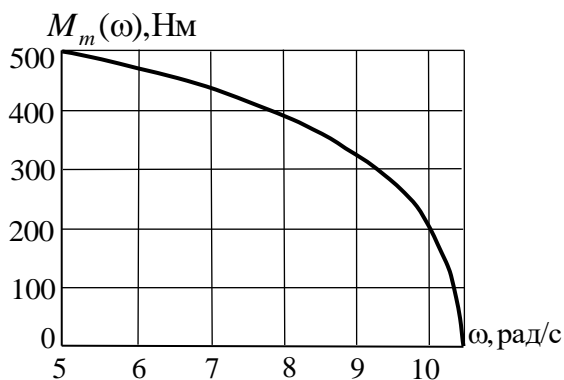


Рис. 17. Залежність моменту гідромотора від кутової швидкості ротора (витрата 20 л/хв)

Графіки залежностей швидкості руху суміші від часу для цього випадку наведені

на рис. 18.

У побудові графіків варіювалися значення пластичної в'язкості ( $\mu_p = 2 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\mu_p = 4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\mu_p = 6 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ), границі текучості ( $\tau_y = 0$ ,  $\tau_y = 25 \text{ Па}$ ,  $\tau_y = 50 \text{ Па}$ ). Для висоти підйому суміші бралось значення  $H = 5 \text{ м}$ ; інші параметри приймалися як і в розрахунках для побудови графіків (рис. 15, 16).

Отримані графіки показують: збільшення потужності гідромотора веде до зростання середньої швидкості руху суміші ( $\approx 1 \text{ м/с}$ ; крива 1); збільшення пластичної в'язкості істотно знижує середню швидкість руху суміші (криві 2, 3).

### Висновки

1. Створена математична модель динамічних процесів у перистальтичному насосі з гідравлічним приводом у формі диференційного рівняння щодо кута повороту ротора. Модель містить основні геометричні, масові характеристики ротора, динамічну характеристику гідромотора, параметри шлангу, середовища Бінгама.

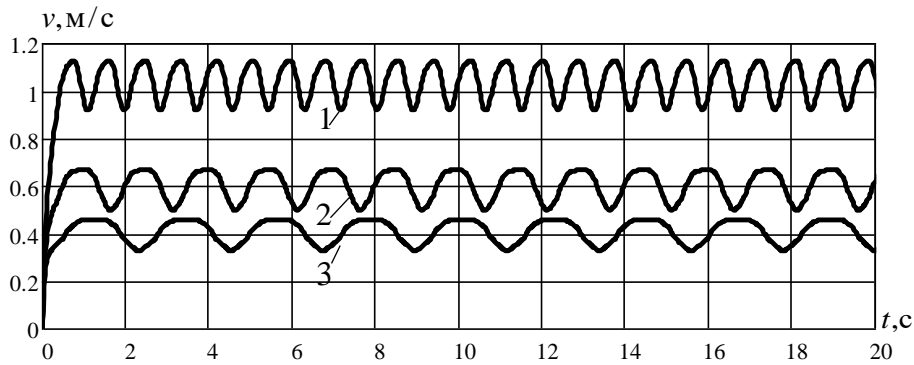


Рис. 18. Швидкість суміші залежно від часу (1 –  $\mu_p = 2 \text{Па} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_y = 0$ ; 2 –  $\mu_p = 4 \text{Па} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_y = 25 \text{Па}$ ; 3 –  $\mu_p = 6 \text{Па} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_y = 50 \text{Па}$ )

2. Розроблено метод формування моменту опору обертанню ротора насоса від роликів, що деформують шланг; встановлено, що він суттєво відрізняється від постійного на інтервалі оберту.

3. Запропоновано метод побудови залежності перепаду тиску від кутової швидкості ротора, що необхідно для визначення сили опору руху суміші за допомогою рівняння Букінгема.

4. Запропоновано нелінійну модель сили опору руху середовища Бінгама.

5. Отримано вирази для сил опору, обумовлених силами ваги частинок суміші у відповідній частині шлангу.

6. Використані дані каталогу подання моменту гідромотора як функції кутової швидкості його ротора.

7. Проведені дослідження динамічних процесів за допомогою створеної моделі. Установлені важливі технологічні закономірності функціонування пристрою: швидкість руху середовища може мати значну змінну складову; швидкість руху середовища й продуктивність насоса зростають у разі зменшення довжини відвідної частини шлангу й зниження висоти його підйому; значний вплив на середню швидкість надає пластична в'язкість середовища; суттєва зміна границі текучості позначається на швидкості незначно.

8. Запропонований підхід дослідження динамічних процесів перспективний для модернізації наявних та розробленні нових моделей перистальтичних насосів.

### Література

1. Klespitz J., Kovács L. Peristaltic pumps – a review on working and control possibilities // *IEEE 12th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics*. Herl'any, Slovakia. 2014. P. 191–194.

2. Пат. UA 112585 C2 Універсальний шланговий бетононасос. Опубл. 26.09.2016.

3. Beyerle. Hose dosing pump // *Maschinenmarkt*. 1978. No. 44. P. 868–870.

4. Кускова М. А. Гидравлические характеристики перистальтических насосов // *Нефтяное хозяйство*. 2008. № 1. С. 104–106.

5. Kinesis Scientific Exprets, “IPC and IPC-N peristaltic dispensing pump”. URL: <https://kinesis.co.uk/knowledgebase/ismatec-ipc-pumps> (дата звернення: 29.01.2022).

6. Patent № US 20090053084 United States. Roller pump and peristaltic tubing with atrium. Опубл. 21.03.2008.

7. Dhananchezhiyan P., Hiremath S. Optimization of Multiple Micro Pumps to Maximize the Flow Rate and Minimize the Flow Pulsation // *Procedia Technology*. 2016 (25). P. 1226–1233.

8. Ryzhakov A., Nikolenko I., Dreszer K. Selektion of discretely adjustable pump parameters for hydraulic drives of mobile equipment // *TEKA Kom. Mot. Energ. Roln. OL. PAN*. 2009. Vol. 9. P. 267–276.

9. Modeling, simulation and identification of a mobile concrete pump / J. Henikl, W. Kemmetmüller, M. Bader, A. Kugi // *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Sitems*. 2015. 21 (2). P. 180–201.

10. Bredel hose pumps. URL: <https://www.watson-marlow.com/us-en/range/bredel/hose-pumps/> (дата звернення: 29.01.2022).

11. Peristaltic hose pumps for industry. PeriFlo.–2003. URL: <http://www.periflo.com> (дата звернення: 29.01.2022).

12. Шатохин В. М., Гранько Б. Ф., Соболев В. Н. Моделирование динамических процессов в перистальтическом бетононасосе с гидроприводом // *Вісник ХНАДУ: зб. наукових праць*. 2020. Вип. 89. С. 15–25.

13. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. Москва: Мир, 1964. 216 с.

14. Aghakhani S., Pordanjani A., Karimipour A., Abdollahi A., Afrand M. Numerical investigation of heat transfer in a power-law non-Newtonian

- fluid in a C-shaped cavity with magnetic field effect using finite difference lattice Boltzmann method. *Comput Fluids*. 2018. No. 176. P. 51–67.
15. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Сабьлина Н. Р., Асеева А. Е., Суртаева А. А. Исследование установившегося течения вязкопластического битумного вяжущего, описываемого моделью Шведова Бингама, в цилиндрической трубе // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета: сб. научных трудов*. 2019. Т. 21. № 3. С. 158–177. DOI: 10.31675/1607-1859-2019-21-3-158-177.
  16. Faraji A., Razavi M., Fatourae N. Linear peristaltic pump device design. *Applied Mechanics and Materials. Advanced Materials & Sports Equipment Design*. 2014. No. 440. P. 199–203.
  17. Walker S., Shelley M. Shape Optimization of Peristaltic Pumping. *Journal of Computational Physics*. 2010. No. 229 (4). P. 1260–1291. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.10.030.
  18. Sucharitha G., Streenadh S., Lakshminarayana P. Non-linear Peristaltic Flow of Pseudoplastic Fluid in an Asymmetric Channel with porous medium. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2013. No. 5(1). P. 106–113.
  19. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: в 2-х т. Т. I. Статика и кинематика. Москва: Наука, 1982. 352 с.
  20. Хайкин С. Э. Физические основы механики. Москва: Наука, 1971. 752 с.
  21. Гидромоторы MR, технические характеристики. URL: [http://www.gik43.ru/equipment/motors/gidromotory\\_mr-](http://www.gik43.ru/equipment/motors/gidromotory_mr-).
  22. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15. Санкт-Петербург: Питер, 2011. 400 с.
- ### References
1. Klespitz J., & Kovács L. (2014). Peristaltic pumps – a review on working and control possibilities. *IEEE 12th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics*: Herl'any, Slovakia, 191–194.
  2. Pat. UA 112585 C2 Universalnij shlangovij betononasos [Universal hose pump]. Opubl. 26.09.2016. [in Ukrainian].
  3. Beyerle. Hose dosing pump. (1978). *Maschinenmarkt*, 44, 868–870.
  4. Kuskova M.A. (2008). Gidravlicheskie harakteristiki peristalticheskikh nasosov [Hydraulic characteristics of peristaltic pumps]. *Neftyanoe hoz'yajstvo*, 1, 104–106 [in Russian].
  5. Kinesis Scientific Exprets, “IPC and IPC-N peristaltic dispensing pump”. URL: <https://kinesis.co.uk/knowledgebase/ismatec-ipc-pumps> (accessed: 29.01.2022).
  6. Patent № US 20090053084 United States. Roller pump and peristaltic tubing with atrium. Оpubл. 21.03.2008.
  7. Dhananchezhayan P., & Hiremath S.S. (2016). Optimization of Multiple Micro Pumps to Maximize the Flow Rate and Minimize the Flow Pulsation. *Procedia Technology*, 25, 1226–1233.
  8. Ryzhakov A., & Nikolenko I., & Dreszer K. (2009). Selektion of discretely adjustable pump parameters for hydraulic drives of mobile equipment. *TEKA Kom. Mot. Energ. Roln. OL. PAN.*, 9, 267–276.
  9. Henikl J., & Kemmetmüller W., & Bader M., et al. (2015). Modeling, simulation and identification of a mobile concrete pump. *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems*, 21 (2), 180–201.
  10. Bredel hose pumps. URL: <https://www.watson-marlow.com/us-en/range/bredel/hose-pumps/> (accessed: 29.01.2022).
  11. Peristaltic hose pumps for industry. PeriFlo. 2003. URL: <http://www.periflo.com> (accessed: 29.01.2022).
  12. Shatohin V. M., Gran'ko B. F., Sobol' V. N. Modelirovanie dinamicheskikh processov v peristal'ticheskom betononasose s gidroprivodom: zb. naukovih prac'. Visnik HNADU. 2020. Vip. 89. S. 15–25 [in Russian].
  13. Uilkinson U. L. Nen'yutonovskie zhidkosti. Moskva: Mir, 1964. 216 s. [in Russian].
  14. Aghakhani S., Pordanjani A., Karimipour A., Abdollahi A., Afrand M. Numerical investigation of heat transfer in a power-law non-Newtonian fluid in a C-shaped cavity with magnetic field effect using finite difference lattice Boltzmann method. *Comput Fluids*. 2018, no. 176, P. 51–67.
  15. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Sabylina N.R., Aseeva A.E., Surtaeva A.A. Issledovanie ustanovivshegosya techeniya vyazkoplasticheskogo bitumnogo vyazhushchego, opisyvaemogo model'yu Shvedova Bingama, v cilindricheskoy trube: sb. nauchnyh trudov. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arhitekturostroitel'nogo universiteta. 2019. T. 21, no. 3. S. 158–177. DOI: 10.31675/1607-1859-2019-21-3-158-177. [in Russian].
  16. Faraji A., Razavi M., Fatourae N. Linear peristaltic pump device design. *Applied Mechanics and Materials. Advanced Materials & Sports Equipment Design*. 2014, no. 440. P. 199–203.
  17. Walker S., Shelley M. Shape Optimization of Peristaltic Pumping. *Journal of Computational Physics*. 2010, no. 229 (4). P. 1260–1291. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.10.030.
  18. Sucharitha G., Streenadh S., Lakshminarayana P. Non-linear Peristaltic Flow of Pseudoplastic Fluid in an Asymmetric Channel with porous medium. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2013, no. 5(1). P. 106–113.
  19. Lojcyanskij L.G., & Lure A.I. (1982). *Kurs teoreticheskoy mehaniki. V 2-h tomah. t. I. Statika i kinematika* [The course of theoretical mechanics. In 2 volumes. Volume 1. Statics and kinematics]. Moskva: Nauka. [in Russian].

20. Hajkin S. E. (1971) *Fizicheskie osnovy mehaniki* [Physical fundamentals of mechanics]. Moscow: Nauka. [in Russian].
21. Gidromotory MR, tehnichekie harakteristiki [MR motors, specifications]. URL: [http://www.gik43.ru/equipment/motors/gidromotory\\_mr](http://www.gik43.ru/equipment/motors/gidromotory_mr). [in Russian].
22. Makarov E. (2011) *Inzhenernyie raschetyi v Mathcad 15* [Engineering Calculations in Mathcad 15]. Sankt Peterburg: Piter. [in Russian].

**Шатохін Володимир Михайлович<sup>1</sup>**, д.т.н., проф. каф. вищої математики, будівельної та теоретичної механіки, тел.: +38 099-461-89-67, [shatokhinvlm@gmail.com](mailto:shatokhinvlm@gmail.com),

**Гранько Борис Федорович<sup>1</sup>**, доц. каф. вищої математики, будівельної та теоретичної механіки, тел.: +38 095-94-87-300, [granko.boris@kstuca.kharkov.ua](mailto:granko.boris@kstuca.kharkov.ua),

**Соболь Володимир Миколайович<sup>2</sup>**, к.т.н., доц. каф. теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, тел.: +38 095-779-09-10, [sobol\\_vn@ukr.net](mailto:sobol_vn@ukr.net).

<sup>1</sup>Харківський національний університет будівництва та архітектури, 61002, Україна, м. Харків, вул. Сумська, 40.

<sup>2</sup>Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 61070, Україна, м. Харків, вул. Чкалова, 17.

### Dynamic processes modeling in a peristaltic pump with a hydraulic drive for a Bingham fluid

**Abstract. Problem.** At present, peristaltic pumps are widely used in construction, chemical production, mining industry, processing plants, food processing industry, etc. The creation of such devices and methods for the rational choice of their parameters is a vital task. One of the effective directions of its solution is the adequate dynamic process modeling in indicated mechanisms. **Goal.** The work is devoted to the creation of a universal mathematical model of dynamic processes in a peristaltic pump with a hydraulic drive for determining the technological qualities of the device, and the choice of its rational parameters. The model contains the primary geometric of the rotor, mass characteristics, the hydraulic motor dynamic characteristics, the parameters of the hose, and the mixture that is moving. **Methodology.** The procedure for the generation of Lagrange equations of the second kind was used for building a mathematical model of dynamic processes in the device. The model has been created in the form of a differential equation concerning the rotor angle of rota-

tion. A method has been developed for forming the resistance moment to the pump rotor spinning from the rollers that deform the hose. A non-linear model of drag forces to the mixture movement, which is the Bingham fluid, is obtained by using the Buckingham equation. An expression is found for the drag forces due to the gravity forces of the mixture particles in the hose discharge part. An approach has been suggested to the usage of the catalog data for representing a hydraulic motor torque as an angular velocity function of its rotor. **Results.** Important technological features of the device operation have been established: the presence of a significant variable component in the mixture motion speed; the influence of the lift height hose length, coefficients of rolling friction for rollers, plastic viscosity, and yield strength in mixture motion speed and pump capacity. **Originality.** Important technological regularities of the device functioning were established: the speed of the mixture motion can have a significant variable component; the speed of the mixture motion and pump's performance increase with a decrease in the length of the discharge hose and a decrease in its height, a decrease in the rolling friction coefficients for the rollers and a rejection of side rollers. **Practical value.** The results of using the developed method for studying dynamic processes were presented when a real construction of a peristaltic pump was being created. The suggested approach is high-potential for the modernization of existing and the development of new models of peristaltic pumps.

**Key words:** a peristaltic concrete pump, dynamic process, a hydraulic drive, a pump rotor, a roller, the Buckingham equation, the Bingham fluid.

**Shatokhin Vladimir<sup>1</sup>**, Doct. of Sciences, Professor Department of Higher Mathematics, Structural and Theoretical Mechanics, tel.: +38 099-461-89-67, [shatokhinvlm@gmail.com](mailto:shatokhinvlm@gmail.com),

**Granko Boris<sup>1</sup>**, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Structural and Theoretical Mechanics,

tel.: +38 095-948-73-00, [grankoa.b@gmail.com](mailto:grankoa.b@gmail.com),

**Sobol Vladimir<sup>2</sup>**, Ph.D., Associate Professor Department of Theoretical Mechanics, Machinery and Robotic Systems, tel. +38 095-779-09-10,

[sobol\\_vn@ukr.net](mailto:sobol_vn@ukr.net).

<sup>1</sup>National University of Civil Engineering and Architecture, 40, Sumskaia st., Kharkiv, 61002, Ukraine.

<sup>2</sup>National Aerospace University named after N. Ye. Zhukovskiy "Kharkov Aviation Institute", 17, Chkalova st., Kharkiv, 61070, Ukraine.