

УДК 539.3

DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2021.95.0.190

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ МАСОВО-ІНЕРЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДОДАТКОВОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ОПОРИ НА НЕСТАЦІОНАРНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

Воропай О. В.¹, Єгоров П. А.¹

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. Уточнюється математична модель в'язкопружної опори за рахунок урахування її масово-інерційних характеристик. Досліджується вплив масово-інерційних характеристик на коливальний процес у випадку нестационарного деформування механічної системи, що складається із прямокутної пружної ізотропної пластини і додаткової в'язкопружної опори. Показано, що масово-інерційні характеристики додаткової в'язкопружної опори спричиняють помітний вплив на коливальний процес, причому зміни стосуються як амплітуди, так і фазових характеристик.

Ключові слова: нестационарні коливання, прямокутна пластина, додаткова в'язкопружна опора, масово-інерційні характеристики, інтегральне рівняння Вольтерра.

Вступ

З кожним днем створюються все більш досконалі машини, обладнання та конструкції. Забезпечення необхідного строку їх служби і раціональне проектування потребують уточнення математичних моделей елементів конструкції на етапі їх проектування. Звісно, що кожен із факторів впливає на напружений стан по-різному і шляхи регулювання такого впливу також є різними, тому інформація про ступінь впливу різних факторів (у даному випадку масово-інерційних характеристик додаткової опори) є актуальною у конструкторській та дослідницькій діяльності.

Аналіз публікацій

За необхідності підвищити жорсткість, міцність або несучу здатність конструкцій використовуються додаткові опори. Також опори та демпфери можуть застосовуватись із метою зменшення амплітуд переміщень або гасіння коливань, віброзахисту, а також керування напружено-деформованим станом. Так, у роботі [1] досліджується керування коливаннями опорних тросів у вантових мостах за рахунок введення в'язких демпферів.

Моделювання додаткових опор, що впливають на деформування досліджуваного об'єкта, пов'язане з рядом ідеалізацій та припущень. У багатьох джерелах описано деформування підпертих елементів конструкції з використанням абсолютно жорстких додаткових опор або ребер жорсткості. В реальності додаткові опори мають в'язкопружні властивості (в'язку та пружну складові), а також інерційні властивості.

Існує значна кількість робіт, у яких розглядаються прямі постановки задач для конструкцій із урахуванням інерційних характеристик об'єктів. Так, у монографії [2] розглядається вплив рухомої маси на балку і тонку прямокутну пластину, що лежить на пружній основі.

В роботі [3] представлені рішення прямої й оберненої задач для балок із додатковими опорами, однак враховуються лише пружні їх характеристики.

Дослідження в'язкопружних характеристик опор при динамічній взаємодії моста та рухомого поїзда наведено у [4].

В роботі [5] розглядаються вимушені коливання тонкої пластини з «дискретним динамічним гасителем» з використанням методу скінченних елементів.

Таким чином, у багатьох задачах аналізу конструкцій можна виділити основний об'єкт, а приєднані до нього елементи моделювати як додаткові опори, тому уточнення моделей, що описують такі системи, є актуальною проблемою.

Мета і постановка задачі

Метою роботи є уточнення існуючої математичної моделі опор шляхом урахування впливу їх масово-інерційних характеристик та дослідження впливу цих характеристик на нестационарне деформування прямокутної пластини.

Виклад основного матеріалу

Нестационарне деформування балок чи пластин описується системами диференціальних рівнянь у частинних похідних. Досвід

показує, що для вказаних об'єктів добрі результати дають моделі на базі гіпотез С. П. Тимошенка, що враховують інерцію обертання та зсув [6–10]. Такі системи рівнянь можуть бути розв'язані за допомогою розкладання шуканих функцій (переміщень та кутів повороту) у відповідні ряди (Фур'є, Бесселя і т.п.) [9–10]. Тоді для коефіцієнтів розкладання як функцій часу можна записати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можуть бути розв'язані з використанням, наприклад, інтегрального перетворення Лапласа [11]. В цьому випадку у процесі виконання обернених перетворень розв'язки можуть бути представлені у вигляді інтегралів типу згортки, що дозволяє виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь.

Механічна система складається із прямокутної пружної ізотропної пластини середньої товщини, яка має шарнірне обпирання за її периметром, та додаткової опори, що контактує з пластиною в деякій точці (рис. 1). Вважається, що додаткову опору встановлено ортогонально до серединної площини пластини, а її переміщення у точці приєднання повністю співпадають зі зміною прогину пластини у точці його кріплення, тобто $w_C(t) = w(x_C, y_C, t)$.

На пластину в деякій точці діє поперечне імпульсне зовнішнє навантаження $P(t)$, що викликає нестационарні коливання пластини з додатковою опорою. В рамках розв'язання прямої задачі необхідно визначити компоненти переміщень точок пластини за часом (прогини та кути повороту нормалі).

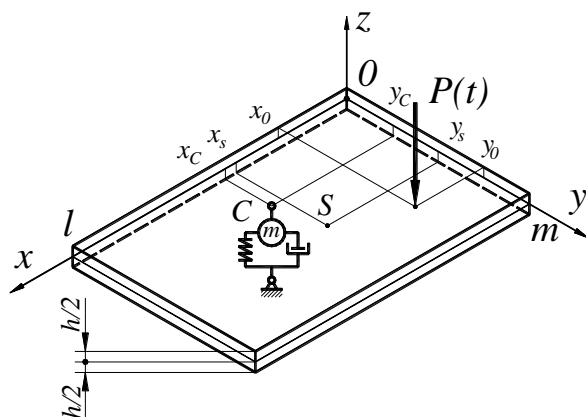


Рис. 1. Пластина та додаткова в'язкопружна опора з урахуванням її масово-інерційних характеристик

При розв'язанні задачі було прийнято, що координати точок прикладання навантаження та координати точки кріплення додаткової

опори бути довільними (будь-які точки, що належать пластині та не знаходяться на її межі).

У рамках теорії пластин С. П. Тимошенко система диференціальних рівнянь [7–8], яка з урахуванням відповідних початкових та крайових умов визначає розв'язок, що описує нестационарні деформаційні процеси у пластині з додатковою опорою, має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + \\ &+ R(t)\delta(x - x_D)\delta(y - y_D); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) &= \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \quad (1) \\ \frac{D}{2} [(1 - \nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1 + \nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - \\ - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) &= \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}; \end{aligned} \right.$$

де h – товщина пластини; $G' = k'G$; k' – коефіцієнт зсуву; $I = h^3/12$; w – прогин серединної площини пластини; ψ_x, ψ_y – кути повороту; ρ , E , ν – пружні сталі матеріалу пластини; t –

час, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ – циліндрична жорсткість;

$$\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Вкажемо, що $P(x, y, t)$ – зовнішнє збурювальне навантаження (зосереджене чи розподілене) та $R(t)$ – реакція взаємодії між пластиною та додатковою опорою, яка вводиться в систему, різняться, як і зовнішнє навантаження, але з протилежним знаком. Таким чином, вплив додаткової опори замінюється додатковим невідомим змінним зусиллям $R(t)$.

Система диференціальних рівнянь (1) за нульових початкових умов розв'язується шляхом розкладання шуканих функцій w_0, ψ_x, ψ_y у подвійні ряди Фур'є згідно розглянутої схеми обпирання. Використавши властивість ортогональності тригонометричних функцій, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, для якої виконується пряме інтегральне перетворення Лапласа; у просторі відображень знаходяться шукані коефіцієнти розкладання; виконується обернене перетворення Лапласа. Розв'язання задач для прямо-

кутних пластин, на які діє система декількох незалежних нестационарних навантажень, описано, наприклад, в [6, 10]. У результаті розв'язку одержуємо наступні аналітичні вирази:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \\
 &- \int_0^t R(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \\
 \psi_x(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau - \\
 &- \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau; \\
 \psi_y(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau - \\
 &- \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau,
 \end{aligned} \quad (2)$$

де $K_i(x, y, t)$ – відповідні ядра інтегралів Дюамеля (згорток) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 K_i^W(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \times \\
 &\times \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t; \\
 K_i^{\Psi x}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \times \\
 &\times \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}; \\
 K_i^{\Psi y}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \times \\
 &\times \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}.
 \end{aligned}$$

У наведених співвідношеннях використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{G'}{\rho}, \quad b = \frac{G'h}{\rho \cdot J}, \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J}, \quad \lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}, \\
 \mu_n^* &= \pi \frac{n}{m}, \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right), \\
 C_{ikn} &= \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m}, \\
 \Delta_{kn} &= \sqrt{(\lambda_{kn}^2(a+d)+b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{1kn} &= \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \\
 \Omega_{2kn} &= -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.
 \end{aligned}$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \omega_{1kn} &= \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) + \Delta_{kn}]}; \\
 \omega_{2kn} &= \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) - \Delta_{kn}]}.
 \end{aligned}$$

Проблема полягає в ідентифікації закону зміни у часі невідомої реакції $R(t)$, для визначення якої вираз (2) для точки установки додаткової опори (x_C, y_C) може бути зведено до інтегрального рівняння Вольтерра I роду відносно невідомої $R(\tau)$.

Таким чином, для шуканих функцій переміщень або деформацій можуть бути записані вирази наступного вигляду:

$$w_j(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_{ij}(t - \tau) \cdot P_i(\tau) d\tau, \quad (3)$$

де $w_j(t)$ – зміна в залежності від часу компоненти переміщення деякої точки (наприклад, прогину пластини); $P_i(t)$ – i -те навантаження ($P_{0i}(t)$ – зовнішня сила або $R_i(t)$ – реакція, що характеризує певну додаткову опору); $K_{ij}(t)$ – ядро відповідного інтеграла згортки для i -го навантаження в j -й точці.

При нестационарному деформуванні балок або пластин з особливостями, наприклад, додатковими опорами, для кожної особливості, що моделюється (об'єкта, що контактує з балкою або пластиною), можна записати вираз вигляду (3). Тобто для N -об'єктів можна записати систему із N інтегральних рівнянь, яка буде мати $2 \cdot N$ невідомих (невідомими є як функції переміщень $w_j(t)$, так і реакції

$R_i(t)$). Для розв'язання такої системи інтегральних рівнянь необхідно записати додаткові (замикаючі) співвідношення для кожної з точок, в якій є особливість.

В загальному випадку можна представити об'єкт, що моделюється, у вигляді комбінації впливів маси, жорсткості та демпфірування (рис. 1), які вважались відомими і незмінними під час коливань.

Вираз для реакції між пластиною та додатковою в'язкопружною опорою, з урахуванням інерційних ефектів, можна записати у наступному вигляді:

$$R(t) = m_1 \frac{d^2 w_C(t)}{dt^2} + \kappa_1 \frac{dw_C(t)}{dt} + c_1 w_C(t). \quad (4)$$

Наведемо для випадку, що розглядається (як найбільш загального), докладну методику з отриманням виразів для функції прогинів у відповідній точці.

Виконаємо для виразу (4) інтегральне перетворення Лапласа; за нульових початкових умов отримаємо формулу:

$$R(s) = m_1 \cdot s^2 \cdot w_C(s) + \kappa_1 \cdot s \cdot w_C(s) + c_1 \cdot w_C(s). \quad (5)$$

Із (5) отримаємо вираз для прогину у просторі відображень:

$$w_C(s) = \frac{R(s)}{m_1 \cdot s^2 + \kappa_1 \cdot s + c_1}. \quad (6)$$

Після виконання оберненого перетворення Лапласа з використанням теореми про згортку отримаємо наступний вираз для прогину в точці прикладання реакції на в'язкопружну опору, з урахуванням її маси:

$$w_C(t) = \int_0^t K_{fi}(t-\tau)R(\tau)d\tau, \quad (7)$$

де $K_{fi}(t) = \frac{1}{m_1} \frac{1}{\omega_{CD1}} \cdot e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}t} \cdot \sin(\omega_{CD1} \cdot t)$ – скінченно-різницева ядро інтеграла типу згортки, що враховує в'язкі, пружні та масово-інерційні характеристики додаткової опори у точці C , а $\omega_{CD1} = \sqrt{c_1/m_1 - 0.25 \cdot \kappa_1^2/m_1^2}$ – власна частота, що відповідає додатковій в'язкопружній опорі, з урахуванням її маси.

Опис розв'язування задачі

Нестационарні коливання механічної системи, яка має N додаткових опор, можуть бути описані N парами інтегральних співвідношень (3) і (7). Для кожної такої пари (для кожної додаткової опори) виконується виключення невідомих функцій переміщень $w_{Ci}(t)$ шляхом прирівнювання відповідних виразів. Наприклад, для однієї в'язкопружної опори з

урахуванням її інерційних характеристик отримаємо:

$$\int_0^t K_P^W(t-\tau)P_0(\tau)d\tau - \int_0^t K_R^W(t-\tau)R(\tau)d\tau = \int_0^t K_f(t-\tau)R(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Вираз (8) після переносу відомих членів у праву частину рівняння, а невідомих – у ліву буде мати вигляд

$$\int_0^t [K_R^W(t-\tau) + K_f(t-\tau)]R(\tau)d\tau = \int_0^t K_P^W(t-\tau)P_0(\tau)d\tau \quad (9)$$

Підсумуємо: в загальному випадку вихідна система, що складається з $2 \cdot N$ інтегрально-диференціальних співвідношень, зводиться до системи N інтегральних рівнянь Вольтерра щодо невідомих реакцій $R_i(t)$. У наведеному прикладі для моделі однієї реальної опори задача зведеться до одного інтегрального рівняння Вольтерра I роду (9).

Далі виконується дискретизація інтегральних рівнянь. Після дискретизації кожне інтегральне рівняння замінюється системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). В результаті чого для розглянутого прикладу (9) його дискретний аналог можна записати у вигляді:

$$\mathbf{A}_R^* \mathbf{R} = \mathbf{w}_P, \quad (10)$$

де вектор \mathbf{R} відповідає зміні в часі реакції $R(t)$, \mathbf{w}_P – зміна переміщення у часі в точці приєднання додаткової опори, викликане тільки зовнішньою силою $P_0(t)$, що знаходиться як

$$w_{Pi} = \int_0^t K_P^W(t-\tau)P_0(\tau)d\tau.$$

У монографії [8] показано наступне: якщо функції, що входять до складу ядра, можуть бути аналітично проінтегровані, то найкращим методом дискретизації є дискретизація з частковим інтегруванням ядра. Таким чином, будемо мати:

$$u_j = u(j \cdot \Delta t) = \sum_{i=1}^j z(i \cdot \Delta t) \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(j\Delta t - \tau)d\tau \quad (11)$$

Наприклад, для функції виду $K(t) = \Omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$ дискретний аналог методом прямокутників можна записати як:

$$u_j = \Delta t \cdot \Omega \cdot \sum_{i=1}^j z(i \cdot \Delta t) \sin(\omega(j-i) \cdot \Delta t), \quad (12)$$

а на основі (11):

$$u_j = 2 \cdot \frac{\Omega}{\omega} \cdot \sum_{i=1}^j z(i \cdot \Delta t) \sin(\omega(j-i) \cdot \Delta t) \times \sin\left(\omega \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (13)$$

Вираз для отримання дискретного аналога (7), відповідно до залежності (11), матиме вигляд:

$$w_{Cj}(t) = w_C(j \cdot \Delta t) = \sum_{i=1}^j R(i \cdot \Delta t) \times \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K_{fi}(j \cdot \Delta t - \tau) d\tau. \quad (14)$$

Отримання підсумкового співвідношення для (14) – не зовсім просте завдання, тому опишемо перетворення більш детально. Необхідно взяти наступний визначений інтеграл:

$$\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(j \cdot \Delta t - \tau) d\tau = \frac{1}{m_1} \frac{1}{\omega_{CD1}} \times \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j \cdot \Delta t - \tau)} \cdot \sin(\omega_{CD1} \cdot (j \cdot \Delta t - \tau)) d\tau. \quad (15)$$

Значимо, що інтеграли виду $\int e^x \cdot \sin x dx$ є циклічними, процес їх взяття вивчається практично в будь-якому курсі вищої математики, і ми не будемо на ньому зупинятися, а для компактності викладу наведемо таке співвідношення:

$$\int e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} \times (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t). \quad (16)$$

Зведемо правий вираз в (15) до виду (16), виконавши заміну змінної $j \cdot \Delta t - \tau$ на t^* : $t^* = j \cdot \Delta t - \tau$; диференціал $dt^* = -d\tau$. Оскільки інтеграл (15) визначений, то слід змінити і межі інтегрування: нижня межа буде $t_1^* = (j-i+1)\Delta t$, а верхня – $t_2^* = (j-i)\Delta t$.

$$\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j \cdot \Delta t - \tau)} \cdot \frac{\sin(\omega_{CD1}(j \cdot \Delta t - \tau))}{m_1 \cdot \omega_{CD1}} d\tau = - \int_{(j-i+1)\Delta t}^{(j-i)\Delta t} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}t^*} \cdot \frac{\sin(\omega_{CD1} \cdot t^*)}{m_1 \cdot \omega_{CD1}} dt^*. \quad (17)$$

Далі, використовуючи (16), можна записати:

$$\frac{-1}{m_1 \omega_{CD1}} \int_{(j-i+1)\Delta t}^{(j-i)\Delta t} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}t^*} \cdot \sin(\omega_{CD1} \cdot t^*) dt^* = \frac{1}{m_1 \omega_{CD1}} \frac{1}{\left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1}\right)^2 + \omega_{CD1}^2} \times \left[e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}t^*} \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} \sin(\omega_{CD1} t^*) + \omega_{CD1} \cos(\omega_{CD1} t^*) \right) \right]_{(j-i+1)\Delta t}^{(j-i)\Delta t}. \quad (18)$$

Після підстановки меж інтегрування в (18) отримаємо

$$\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(j \cdot \Delta t - \tau) d\tau = \frac{1}{c_1 \cdot \omega_{CD1}} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j-i)\Delta t} \times \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} \sin(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) + \omega_{CD1} \times \cos(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) \right) - \frac{1}{c_1 \cdot \omega_{CD1}} \times e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j-i+1)\Delta t} \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} \sin(\omega_{CD1}(j-i+1)\Delta t) + \omega_{CD1} \cos(\omega_{CD1}(j-i+1)\Delta t) \right) \quad (19)$$

Для зручності обчислень, в яких використовуються співвідношення (19), його доцільно перетворити і структурувати щодо $(j-i)\Delta t$, оскільки всі інші співмножники не змінюються зі зміною часу. Виділимо в експоненті та тригонометричних функціях $(j-i)\Delta t$, використовуючи відомі співвідношення:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (20)$$

Застосувавши (19), представимо у розгорнутому вигляді вираз, отриманий після підстановки нижньої межі:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_1 \cdot \omega_{CD1}} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j-i+1)\Delta t} \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} \sin(\omega_{CD1}(j-i+1)\Delta t) + \omega_{CD1} \cos(\omega_{CD1}(j-i+1)\Delta t) \right) = \\ & = \frac{1}{c_1 \cdot \omega_{CD1}} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j-i)\Delta t} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}\Delta t} \left[\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} [\sin(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) \cdot \cos(\omega_{CD1}\Delta t) + \cos(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) \cdot \sin(\omega_{CD1}\Delta t)] + \right. \\ & \left. + \omega_{CD1} [\cos(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) \cdot \cos(\omega_{CD1}\Delta t) - \sin(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) \cdot \sin(\omega_{CD1}\Delta t)] \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Після підстановки розвинення (19) в (20) і його подальшого спрощення з використанням перегрупування отримуємо підсумкове

співвідношення, оптимізоване для багаторазових обчислень, оскільки воно структуроване відносно $(j-i)\Delta t$:

$$\begin{aligned} & \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(j \cdot \Delta t - \tau) d\tau = \frac{1}{m_1} \frac{1}{\omega_{CD1}} \cdot \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j \cdot \Delta t - \tau)} \cdot \sin(\omega_{CD1} \cdot (j \cdot \Delta t - \tau)) d\tau = \\ & = \frac{1}{c_1 \cdot \omega_{CD1}} e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}(j-i)\Delta t} \left[\sin(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) \cdot \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} - e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}\Delta t} \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} \cos(\omega_{CD1}\Delta t) \right) - \omega_{CD1} \sin(\omega_{CD1}\Delta t) \right) + \right. \\ & \left. + \cos(\omega_{CD1}(j-i)\Delta t) \cdot \left(\omega_{CD1} - e^{-\frac{\kappa_1}{2m_1}\Delta t} \left(\frac{\kappa_1}{2 \cdot m_1} \sin(\omega_{CD1}\Delta t) \right) + \omega_{CD1} \cos(\omega_{CD1}\Delta t) \right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

У прямій задачі, за умови, що зовнішня сила $P_0(t)$ є відомою, СЛАР (10) розв'язується будь-яким зручним методом (матриця \mathbf{A}_R^* «добре» обертається).

У разі, якщо розв'язується обернена задача (зовнішня сила $P_0(t)$ невідома) чи до пластини приєднано кілька додаткових опор, задача зводиться до блокової СЛАР, яка розв'язується за допомогою узагальненого алгоритму Крамера або Гаусса [12] з використанням регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова [13].

Якщо до пластини приєднано кілька додаткових опор у результаті рішення блокової СЛАР визначаються невідомі залежності у часі реакцій $R_j(t)$, кожна з яких описує вплив приєднаної у відповідній точці додаткової опори на нестационарні коливання (деформування) основного об'єкта (балки або пластини). Знаючи зовнішнє навантаження і залежності $R_j(t)$, можна визначити усі компоненти переміщення в будь-якій точці досліджуваного об'єкта на базі залежностей вигляду (3).

Обчислювальний експеримент

В роботі розглядається конкретний приклад моделювання нестационарних поперечних коливань прямокутної пластини середньої товщини. Для простоти опису прийнято, що прямокутна пластина має шарнірне обпирання по контуру і тільки одну додаткову опору

(прикладену до нижньої лицьової поверхні пластини в деякій точці, що не належить контуру обпирання). В якості додаткової опори досліджується найбільш реалістична модель, що враховує пружні, в'язкі, а також різні масово-інерційні характеристики, які варіюють у ході обчислювального експерименту.

При розрахунках серединна площина пластини була пов'язана із площиною xOy декартової системи координат. Обчислення проводилися за наступних значень параметрів: $\rho=7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu=0,3$; $E=2,07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (значення механічних констант для пластини відповідають легованій сталі); $h=0,05 \text{ м}$; $l=0,8 \text{ м}$, $m=0,5 \text{ м}$. Координати точки прикладання збурювального навантаження наступні: $x_0=0,5 \text{ м}$, $y_0=0,4 \text{ м}$. Координати точки кріплення додаткової в'язкопружної опори до пластини: $x_c=0,4 \text{ м}$, $y_c=0,25 \text{ м}$. Координати точки, в якій досліджувалася зміна прогину пластини у часі (центр пластини): $x_s=0,2 \text{ м}$, $y_s=0,2 \text{ м}$. Значення коефіцієнта жорсткості додаткової опори $c_1 = 10^8 \text{ Н/м}$, а коефіцієнт лінійно-в'язкого демпфірування $\kappa_1 = 10^4 \text{ Н/(м/с)}$; число членів у відповідних подвійних рядах Фур'є 50×50 .

Загальний вигляд розглянутої при розрахунках геометрії показано на рис. 2.

На рис. 3 показано зовнішню збурювальну силу, яка викликає деформування (нестационарні коливання) прямокутної пластини з додатковою опорою.

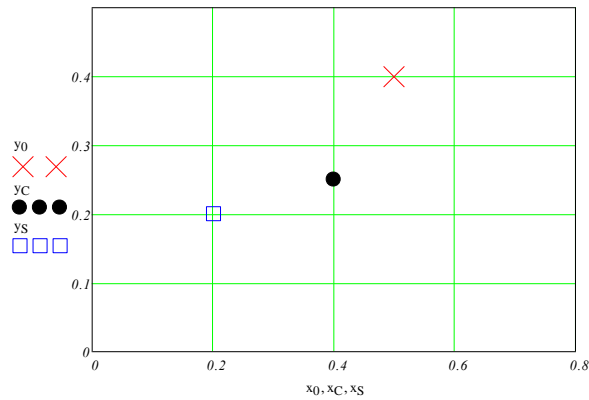


Рис. 2. Схема навантаження пластини у плані:
 × – точка прикладання збурювальної сили;
 ● – точка приєднання додаткової опори;
 □ – точка установки датчика прогину

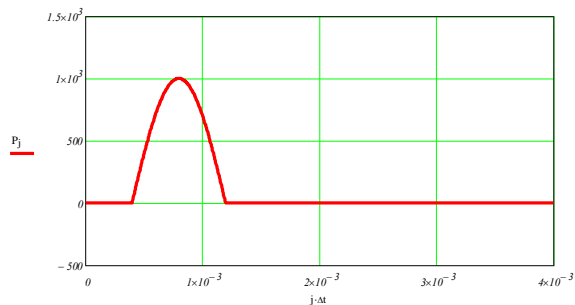


Рис. 3. Зміна збурювального навантаження в часі: по осі абсцис – час у секундах; по осі ординат – сила в Ньютонах

При обчисленнях розглядалося 3 випадки:

1) Величина масово-інерційної характеристики додаткової опори мінімально є допустимою, що відповідає умові, якщо маса буде менше $m_{\min} = \kappa_1^2 / 4 \cdot c_1$, власна частота, що відповідає додатковій в'язкопружній опорі, з урахуванням її маси $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i / m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2 / m_i^2}$, стане комплексною. Для прийнятих значень параметрів (c_1, κ_1) $m_{\min} = 0.25$ кг. При розрахунках було прийнято значення $m_1 = 0.251$ кг. Цей випадок використовувався для зіставлення результатів обчислення реакції в'язкопружної опори і опори з урахуванням всіх трьох параметрів (m_1, c_1, κ_1).

2) Величина масово-інерційної характеристики додаткової опори $m_1 = 2.5$ кг. Відносно реалістичний варіант, з урахуванням прийнятих розрахункових параметрів.

3) Величина масово-інерційної характеристики додаткової опори $m_1 = 25$ кг. Відносно велике значення маси для більш наочного

відображення впливу зміни реакції додаткової опори.

На рис. 4–6 показано результати обчислень для 1-го випадку з урахуванням маси $m_1 = 0.251$ кг та для в'язкопружної опори без урахування її маси, згідно з методикою, описаною в роботі [6].

Зазначимо, що на рис. 4 і 5 наведено ідентичні графіки визначених у результаті розв'язання СЛАР виду (10) реакцій в'язкопружної опори $R_e(t)$ (без урахування маси) та $R_f(t)$ (з урахуванням впливу масово-інерційної характеристики). Тільки на рис. 4 для оцінки величини також показано зовнішню збурювальну силу $P_0(t)$, а на рис. 5 – виключно реакції $R_e(t)$ і $R_f(t)$. З огляду на рис. 4 може здатись, що реакції $R_e(t)$ і $R_f(t)$ майже співпадають, але рис. 5 дозволяє помітити невелику відмінність між ними, викликану врахуванням невеликої маси. Можна відзначити незначне зменшення реакції між пластиною і додатковою опорою, викликане наявністю невеликої маси (інерційними характеристиками додаткової опори).

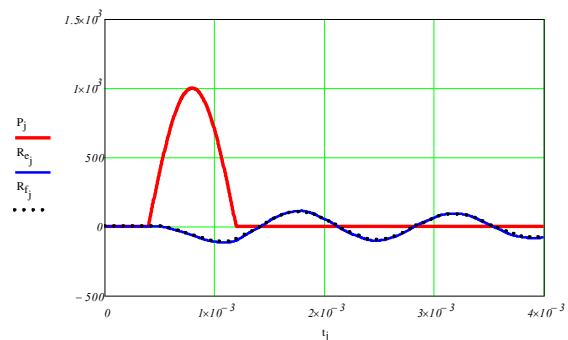


Рис. 4. Зміна в часі збурювального навантаження і реакцій між пластиною та додатковою опорою

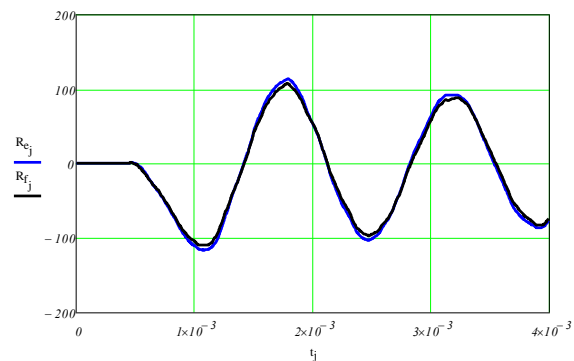


Рис. 5. Відмінності реакцій додаткової в'язкопружної опори з урахуванням маси – $R_f(t)$ і без її урахування – $R_e(t)$

На рис. 6 показано зміну прогину в точці (x_S, y_S) . Наведено 3 кривих: $w_{PS}(t)$ – зміна прогину пластини, викликана тільки збурювальною силою; $w_{\Sigma Se}(t)$ – зміна прогину, викликана спільною дією зовнішньої сили $P_0(t)$ і реакції в'язкопружної опори $R_e(t)$ (без урахування маси); $w_{\Sigma Sf}(t)$ – зміна прогину, викликана дією сили $P_0(t)$ і реакції $R_f(t)$ (яка враховує також і масово-інерційну характеристику). З аналізу рис. 6 видно, що, незважаючи на невелику різницю між реакціями $R_e(t)$ та $R_f(t)$, прогини в досліджуваній точці практично не відрізняються. Це обумовлено малою величиною маси, а також тим, що досліджувана точка не знаходиться в безпосередній близькості від додаткової опори (вона знаходиться на деякій відстані; в описаному розрахунку відстань більше 0,1 м).

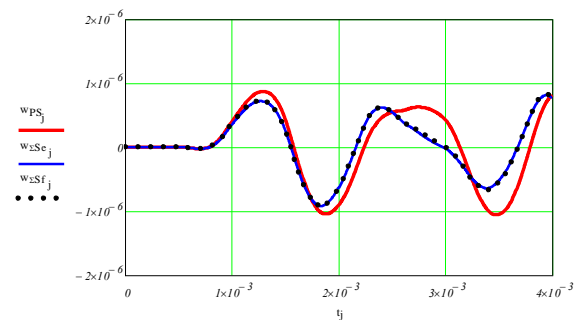


Рис. 6. Зміна прогинів у точці (x_S, y_S) : по осі абсцис – час у секундах; по осі ординат – величина прогину пластини в метрах

Зазначимо, що у випадку малої величини маси (рис. 4–6) характер кривих суттєво не змінюється.

На рис. 7–9 показано результати обчислень для 2-го випадку з урахуванням маси $m_1 = 2.5$ кг (в 10 разів більше, ніж у попередньому випадку). Опис цих рисунків є аналогічним опису рис. 4–6, відрізняється тільки величина маси.

Проаналізувавши результати, показані на рис. 7–9 для 2-го випадку, з урахуванням реалістичних значень масово-інерційних характеристик додаткової опори ($m_1 = 2.5$ кг), можна відзначити деякі зміни амплітудних характеристик, обумовлених величиною маси, і, що найголовніше, – фазовий зсув (зміщення екстремумів за віссю часу), а також зміну характеру кривих реакцій додаткової в'язкопружної опори.

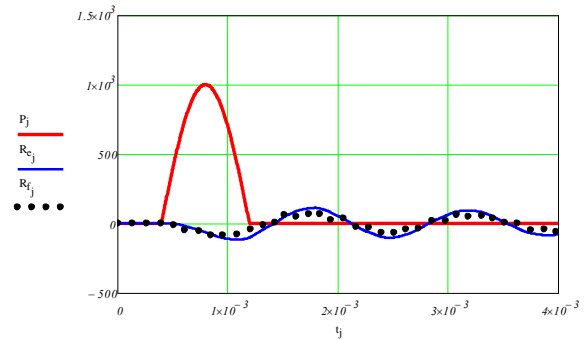


Рис. 7. Зміна в часі збурювального навантаження і реакцій між пластиною та додатковою опорою

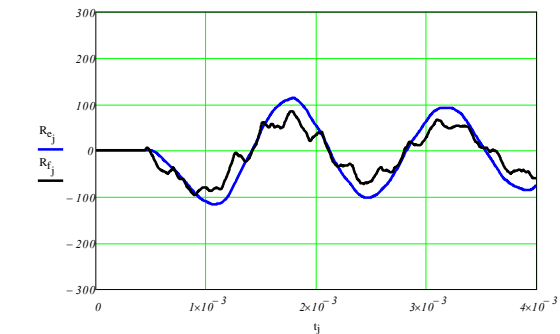


Рис. 8. Відмінності реакцій додаткової в'язкопружної опори з урахуванням маси – $R_f(t)$ і без її урахування – $R_e(t)$

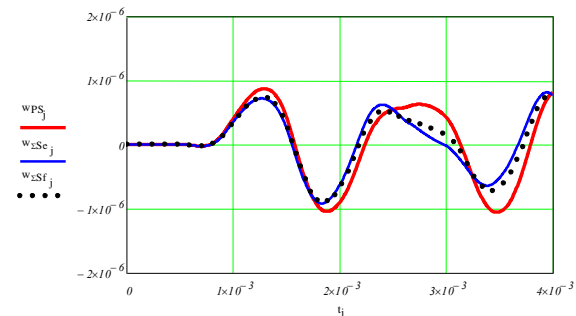


Рис. 9. Зміна прогинів у точці (x_S, y_S)

На рис. 10–12 показано результати обчислень для 3-го випадку, з урахуванням маси $m_1 = 25$ кг (відносно великого значення маси). Опис рис. 10–12 є аналогічним опису рисунків 4–6 і 7–9.

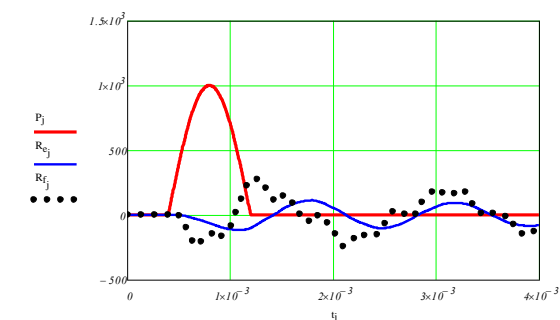


Рис. 10. Зміна в часі збурювального навантаження і реакцій між пластиною та додатковою опорою

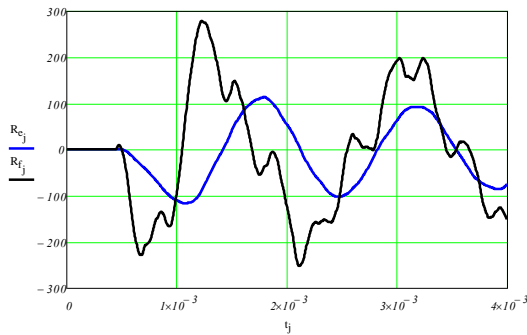


Рис. 11. Відмінності реакцій додаткової в'язкопружної опори з урахуванням маси – $R_f(t)$ і без її урахування – $R_e(t)$

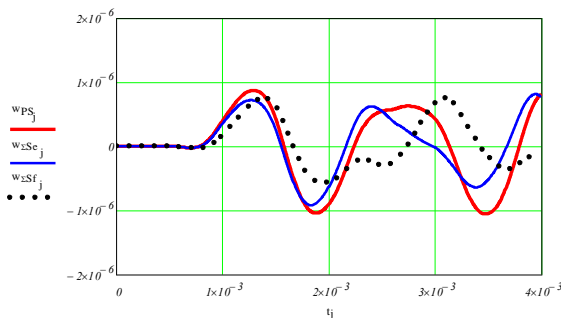


Рис. 12. Зміна прогинів у точці (x_s, y_s)

Після аналізу рис. 10–12, з урахуванням відносно великих значень масово-інерційних характеристик додаткової опори (для 3-го випадку, $m_1 = 25$ кг), можна відзначити помітні відмінності амплітудних і фазових характеристик, обумовлених величиною маси. Також зазначимо, що при числових розрахунках змінювалась лише маса.

Висновки

Описано методику, що дозволяє враховувати вплив масово-інерційної характеристики додаткової в'язкопружної опори при нестационарному деформуванні прямокутної пластини. Визначення невідомої реакції зводиться до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра I роду. В роботі отримано основні аналітичні співвідношення для отримання інтегральних рівнянь або їх систем, а також наведено алгоритм їх розв'язання.

Описано результати обчислень для конкретних чисельних значень. Проведено аналіз впливу масово-інерційної характеристики додаткової в'язкопружної опори на нестационарні коливання пластин. Показано, що для малих мас різниця між реакціями додаткової в'язкопружної опори, з урахуванням її масово-інерційної характеристики і без урахування маси, практично відсутня, що може бути непрямым доказом правильності отриманої моделі.

В якості головного висновку можна відзначити, що масово-інерційні характеристики додаткової в'язкопружної опори спричиняють помітний вплив на коливальний процес, причому як на амплітудні, так і на фазові характеристики. Відповідно для отримання більш достовірних результатів розрахунків під час дослідження нестационарних коливань реальних конструкцій, що мають додаткові в'язкопружні опори, не можна нехтувати їх масами.

Література

1. Di F., Sun L., Chen L. Cable vibration control with internal and external dampers: Theoretical analysis and field test validation // *Smart Structures and Systems*, 2020. Vol. 26., Issue 5. P. 575–589.
2. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. Киев: Наукова думка. 1980. 232 с.
3. Янютин Е. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спиранням // *Машинознавство*. 2007. № 8. С. 18–23.
4. Li H., Gomez D., Dyke S.J., Xu Z., Dai J. Investigating Coupled Train-Bridge-Bearing System under Earthquake-and Train-Induced Excitations // *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 2021. Vol. 143., Issue 5, Article num. 051003.
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures*, 2005. Vol. 43. P. 1513–1533.
6. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин: монография. Харьков: Изд-во «Лидер», 2018. 214 с. ISBN 978-617-7476-10-7
7. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ. 1973. 272 с.
8. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 736 с.
9. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарпата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций: монография. Харьков: ХНАДУ, 2004. 392 с.
10. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел: монография в 2-х частях. Часть II. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. 212 с.
11. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966. 405 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. – 576 с.

13. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

References

1. Di F., Sun L., Chen L. Cable vibration control with internal and external dampers: Theoretical analysis and field test validation. *Smart Structures and Systems*, 2020, Vol. 26., Issue 5., pp. 575–589.
2. Kokhmaniuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniia deformiruemikh sistem pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Oscillations of deformable systems under impulse and moving loads] Kiev, Naukova dumka, 1980. 232 p.
3. Yanyutin E. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'jazannja nestacionarnykh prjamykh ta obernenykh zadach dlja balok z pruzhnyim dodatkovym spyranjam [Solving non-stationary direct and inverse problems for beams with elastic additional support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, № 8., pp. 18–23.
4. Li H., Gomez D., Dyke S. J., Xu Z., Dai J. Investigating Coupled Train-Bridge-Bearing System under Earthquake-and Train-Induced Excitations. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 2021, Vol. 143., Issue 5, Article num. 051003.
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers. *Journal of Thin-Walled Structures*, 2005, Vol. 43, pp. 1513–1533.
6. Voropay A. V. *Yntegral'nyye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachah nestacionarnogo deformirovaniya plastyn*. [Volterra integral equations in inverse problems of nonstationary deformation of plates]. Kharkov, publ. «Lyder», 2018. 214 p. ISBN 978-617-7476-10-7
7. Grigoliuk E. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdykh deformiruemykh tel. T. 5. Neklassicheskie teorii kolebanii sterzhnei, plastin i obolochek* [Mechanics of solid deformable bodies. V. 5. Non-classical theories of vibrations of rods, plates and shells]. Moscow, VINITI. 1973. 272 p.
8. Filippov A. P. *Kolebaniia deformiruemykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970. 736 p.
9. Yanyutin E. G., Yanchevskii I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniia elementov konstruksii* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, KhNADU, 2004. 392 p.
10. Yanyutin E. G., Voropay A. V., Povaliaev S. I., Ianchevskii I. V. *Identifikatsiia nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel* [Identification of loads during impulse deformation of bodies]. Part II. Kharkov, publ. KhNADU, 2010. 212 p.

11. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaia shkola publ., 1966. 405 p.
12. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka publ., 1967. 576 p.
13. Tikhonov A. N., Goncharovskii A. V., Stepanov V. V., Iagola A. G. *Regulariziruiushchie algoritmy i apriornaia informatsiia* [Regularizing algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka publ., 1983. 200 p.

Воропай Олексій Валерійович¹, д.т.н., проф. каф. деталей машин і ТММ, тел. +38-050-524-92-54, voropay.alexey@gmail.com

Єгоров Павло Анатолійович¹, к.т.н., доц. каф. деталей машин і ТММ, тел. +38-057-707-37-10, phd.egpavel@gmail.com

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 61002, Україна, м. Харків, вул. Ярослава Мудрого, 25.

Investigation of the influence of an additional viscoelastic support mass-inertial characteristics on the rectangular plate non-stationary deformation

Abstract. Problem. Modeling additional supports that affect the non-stationary deformation of lamellar structural elements is associated with a number of idealizations and assumptions. Many sources describe the deformation of supported structural elements using absolutely rigid additional supports or stiffeners. In reality, additional supports have viscoelastic properties (viscous and elastic components). When studying non-stationary vibrations, one should also take into account the mass-inertial properties of additional supports. **Goal.** The goal of the work is: 1) refinement of the existing mathematical model of an additional viscoelastic support by taking into account the influence of its mass-inertial characteristics; 2) study of the influence of these characteristics on the non-stationary deformation of a rectangular plate. **Methodology.** The non-stationary deformation of beams or plates is described by systems of partial differential equations. For these objects, good results are given by models based on the hypotheses of S.P. Timoshenko, taking into account the inertia of rotation and shear. Such systems of equations can be solved by expanding the sought functions (displacements and angles of rotation) in the corresponding series and using the direct and inverse integral Laplace transform. The determination of the unknown reaction of the additional viscoelastic support, taking into account its mass-inertial characteristics, is carried out on the basis of solving the Volterra integral equations. **Results.** In this work, an analytical and numerical solution in a general form is obtained, which makes it possible to determine the dependence of the change in time of reaction between the plate

and the additional support for various parameters of the mechanical system. **Originality.** The solution to this problem is based on the further development by the authors of an approach to modeling additional supports in the form of additional unknown non-stationary loads, which are determined from the analysis of Volterra integral equations. **Practical value.** Examples of calculations for the considered mechanical system at three different values of mass are given. It is shown that the mass-inertial characteristics of the additional support cause a noticeable effect on the oscillatory process, and the changes concern both amplitude and phase characteristics.

Key words: non-stationary vibrations, rectangular plate, additional viscoelastic support, mass-inertial characteristics, Volterra integral equation.

Voropay Alexey¹, professor, Doct. of Science, Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms Department, tel. +38-050-524-92-54, voropay.alexey@gmail.com

Yegorov Pavel¹, Ph.D., Assoc. Prof. Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms Department, tel. +38-057-707-37-10, phd.egpavel@gmail.com

¹Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.
