УДК 629.341 DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2021.92.2.37

ДО РОЗРАХУНКІВ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Сур'янінов М. Г.[1], Бойко О. В.[1]
[1]Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація. *Розглянуто застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів (ЧА МГЕ) до розрахунків пологих оболонок. Завдання щодо вигинання пологої оболонки є двовимірним, а в чисельно-аналітичному методі граничних елементів пластини й оболонки розглядаються як узагальнені одномірні модулі, тому до цього рівняння застосували метод розподілу змінних Фур'є та варіаційний метод Канторовича-Власова, що дозволило одержати звичайні диференціальні рівняння восьмого порядку.*

Ключові слова: *полога оболонка, метод граничних елементів, метод Фур'є, метод Канторовича-Власова, фундаментальні функції*

Вступ

Застосування оболонкових конструкцій є найбільш ефективним розв'язком для перекриття більших прольотів без використання проміжних опор. Вони є досить міцними для сприйняття зовнішніх навантажень, тому мають порівняно невелику вагу, прості в монтажі, що робить їхнє застосування економічно вигідним.

Форму оболонки покриття визначає тип її серединної поверхні. Для покриття прямокутних залів застосовують оболонки з поверхнею обертання або перенесення. З поверхонь обертання найчастіше використовують фрагмент опуклої поверхні тора позитивної гаусової кривизни. Поверхня переносу формує переміщення криволінійної утворювальної (кругової, параболічної, еліптичної тощо) вздовж паралельних криволінійних напрямних. Для оболонок з монолітного бетону вибирають переважно поверхню переносу, що спрощує конструкцію опалубки й технологію зведення, а для збірних оболонок вибирають тороїдальну поверхню переносу.

Використання оболонкових конструкцій викликає постійний інтерес механіків і математиків до розроблення нових підходів щодо їхнього розрахування. Аналітичних розв'язків у теорії оболонок дуже мало, і всі вони досить складні для практичного застосування. Внести свій вклад до вирішення цієї проблеми може, на нашу думку, застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

Аналіз публікацій

Теорія пологих оболонок створена насамперед працями видатного вченого В. З. Власова [1, 2] і надалі розвинена в різноманітних напрямах працями А. А. Назарова [3], А. Л. Гольденвейзера [4], А. Р. Ржаніцина, В. В. Новожилова, П. М. Огибалова, Н. В. Колкунова [5], І. Н. Слезінгера, Л. М. Пухонто, Н. Н. Леонт'єва, П. А. Лукаша, С. П. Тимошенка та ін. Завдання розрахунків пологої оболонки зводять до вирішення завдання для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних. Подібні завдання вирішувалися аналітичними методами, зокрема методами подвійних тригонометричних рядів (метод Нав'є), одинарними гіперболо-тригонометричними рядами (метод Леві), або наближеними, наприклад варіаційними методами (методом скінчених різниць (МСР), методом скінчених елементів (МСЕ), методом граничних елементів (МГЕ), методом послідовних апроксимацій (МПА). Застосування аналітичних методів у процесі вирішення завдань теорії пологих оболонок аналізується в роботах таких учених, як В. З. Власов, А. А. Назаров, В. В. Дикович, Л. С. Гаранін, Л. Г. Мухадзе, П. М. Огибалов, М. А. Колтунов, Ю. П. Федоров, Б. К. Михайлов та інших. Вирішення завдань теорії пологих оболонок наближеними методами, зокрема варіаційним методом Бубнова-Гальоркіна досліджували Я. А. Пратусевич [6], П. І. Кохреідзе [7], С. Д. Кисляков та інші. Застосування чисельних методів є предметом багатьох публікацій, з яких можна виокремити роботи [9−13].

Кількість сучасних публікацій із застосування чисельних методів для розрахунків пологих оболонок досить велика, цьому, безумовно, сприяє розвиток комп'ютерної техніки й інженерних програм розрахунків. Тут можна виокремити роботи [14−19].

Мета і постановка завдання

Метою цієї роботи є зведення рівнянь теорії пологих оболонок до виду, необхідного для вирішення завдання методом граничних елементів.

Результати досліджень

Рівняння статики пологих оболонок із прямокутним планом отримані В. З. Власовим [1]:

$$\begin{cases} D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) - \nabla_k^2\varphi(x,y) = q_z(x,y); \\ \nabla^2\nabla^2\varphi(x,y) + Eh\nabla_k^2 w(x,y) = q_{xy}(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

де $w(x,y)$ − поперечний прогин; $\varphi(x,y)$ − функція напружень; D − циліндрична жорсткість; E − модуль Юнга; ∇^2 − оператор Лапласа; k_x, k_y, k_{xy} − кривизни;
h − товщина оболонки:

$$\nabla_K^2 = k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \tag{2}$$

Праві частини рівнянь (1) визначаються виразами

$$q_z(x,y) = P_z - \int_0^x P_x dx - \int_0^y P_y dy; \tag{3}$$

$$q_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2\left(\int_0^y P_y dy\right)}{dx^2} - \mu\frac{\partial^2\left(\int_0^x P_x dx\right)}{dx^2} + \\ + \frac{\partial^2\left(\int_0^x P_x dx\right)}{dy^2} - \mu\frac{\partial^2\left(\int_0^y P_y dy\right)}{dy^2},$$

де P_z; P_x; P_y − нормальна й тангенціальні складові навантаження; μ − коефіцієнт Пуассона.

Систему рівнянь (1) можна приблизно розв'язати варіаційним методом Бубнова-Гальоркіна за будь-яких граничних умов і довільного зовнішнього навантаження [1]. У цьому випадку розрахункова схема оболонки дискретизується за двома напрямами.

Більш досконалою розрахунковою моделлю є континуальна модель в одному напрямі та дискретна в іншому. Така схема реалізована в методі переміщень, але тільки для шарнірного обпирання поздовжніх країв оболонки [5]. Для довільних граничних умов подібні типи розв'язання відсутні.

Задамо функції $w(x,y)$ й $\varphi(x,y)$ як

$$w(x,y) = \nabla^2\nabla^2 T(x,y) + \nabla_K^2 Z(x,y)\frac{1}{D}; \\ \varphi(x,y) = \nabla^2\nabla^2 Z(x,y) - Eh\nabla_K^2 T(x,y), \tag{4}$$

тоді рівняння (1) шляхом підставляння (4) зводяться до двох окремих рівнянь з однаковою структурою:

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 T(x,y) + Eh\nabla_K^2\nabla_K^2 T(x,y)\frac{1}{D} = \\ = q_z(x,y)\frac{1}{D}; \\ \nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 Z(x,y) + Eh\nabla_K^2\nabla_K^2 Z(x,y)\frac{1}{D} = \\ = q_{xy}(x,y). \tag{5}$$

Для розв'язання цих рівнянь використовуємо метод розподілу змінних Фур'є та варіаційний метод Канторовича-Власова. Згідно з методом Фур'є невідомі функції можна записати як ряди:

$$T(x,y) = R(y)X_1(x); \; Z(x,y) = \Lambda(y)X_2(x). \tag{6}$$

Ряди представлені *k-i* членами, а індекси тут і далі опущені. Безрозмірна функція $X_1(x)$ визначає поперечний розподіл прогинів оболонки, а безрозмірна функція $X_2(x)$ − розподіл функції напружень у напрямку осі *ox*. Функції $X_1(x)$ та $X_2(x)$ визначаються як розв'язок диференціального рівняння поперечних коливань балки за відповідних граничних умов. Для моментного й безмоментного станів оболонки граничні умови, що визначають вид функцій $X_1(x)$ і $X_2(x)$, у загальному випадку різні та співпадають тільки для шарнірного обпирання.

Підставимо (6) в (5) і помножимо дві частини першого рівняння (5) на $X_1(x)$, а дві частини другого рівняння на $X_2(x)$, а потім проінтегруємо в межах ширини оболонки. Отримуємо два звичайні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$A_1 R^{VIII}(y) + B_1 R^{VI}(y) + C_1^* R^{IV}(y) + \\ + G_1 R''(y) + H_1 R(y) = \frac{q_z(y)}{D}; \\ A_2 \Lambda^{VIII}(y) + B_2 \Lambda^{VI}(y) + C_2^* \Lambda^{IV}(y) + \\ + G_2 \Lambda''(y) + H_2 \Lambda(y) = q_{xy}(y), \tag{7}$$

де коефіцієнти першого рівняння мають такий вигляд:

$$A_1=\int_0^{l_1} X_1^2(x)dx;\ B_1=\int_0^{l_1} 4X_1''(x)X_1(x)dx;$$

$$q_z(y)=\int_0^{l_1} q_z(x,y)X_1(x)dx;$$

$$C_1^*=\int_0^{l_1}\left[6X_1^{IV}(x)+\frac{Eh}{D}k_x^2X_1(x)\right]X_1(x)dx; \quad (8)$$

$$G_1=\int_0^{l_1}\left[4X_1^{IV}(x)+\frac{Eh}{D}2k_xk_yX_1''(x)\right]X_1(x)dx;$$

$$H_1=\int_0^{l_1}\left[X_1^{VIII}(x)+\frac{Eh}{D}k_y^2X_1^{IV}(x)\right]X_1(x)dx;$$

l_1 – ширина оболонки.

Аналогічні вирази будуть мати й коефіцієнти другого рівняння, але з функцією $X_2(x)$. Для деякого спрощення перетворень будемо вважати, що $k_{xy}=0$, тобто рівняння (7) слушні для оболонки, яка має поверхні еліптичного (гіперболічного) параболоїда й циліндра. У процесі шарнірного обпирання поздовжніх країв оболонки, коли $X_1(x)=X_2(x)$, ряди (6) будуть зводитися до точного розв'язання рівнянь (1). За інших граничних умов на поздовжніх краях розв'язання цим методом рівнянь (1) буде наближеним.

Характеристичне рівняння для першого рівняння (7) має вигляд

$$A_1k^8+B_1k^6+C_1^*k^4+G_1k^2+H_1=0. \quad (9)$$

Це рівняння підставлянням $Z=k^2+\frac{B_1}{2A_1}$ зводиться до неповного рівняння четвертого ступеня:

$$Z^4+P_1Z^2+q_1Z+r_1=0, \quad (10)$$

де

$$P_1=\frac{8A_1C_1^*-3B_1^2}{8A_1^2};$$

$$q_1=\frac{B_1^3-4A_1B_1C_1^*+8A_1^2G_1}{8A_1^3}; \quad (11)$$

$$r_1=\frac{-3B_1^4+16A_1B_1^2C_1^*-64A_1^2B_1G_1+256A_1^3H_1}{256A_1^4}.$$

Корінь рівняння (10) обчисляють за формулами

$$Z_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}\right);$$

$$Z_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}\right);$$

$$Z_3=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}\right); \quad (12)$$

$$Z_4=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}\right),$$

де $x_1;\ x_2;\ x_3$ – корінь кубічного рівняння

$$x^3+2P_1x^2+(P_1^2-4r_1)x-q_1^2. \quad (13)$$

Корінь рівняння (13) можна обчислити за формулами Кардано. Для цього зведемо (13) підставлянням $x=y-\frac{2P_1}{3}$ до неповного кубічного рівняння

$$y^3+my+n=0, \quad (14)$$

де

$$m=-\frac{P_1^2+12r_1}{3};\ n=\frac{-2P_1^3+72P_1r_1-27q_1^2}{27}. \quad (15)$$

Корінь рівняння (14) мають вид

$$y_1=A+B;$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left[-(A+B)+i(A-B)\sqrt{3}\right]; \quad (16)$$

$$y_3=\frac{1}{2}\left[-(A+B)-i(A-B)\sqrt{3}\right];$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{Q_*}};\ B=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{Q_*}};$$

$$Q_*=\left(\frac{m}{3}\right)^3+\left(\frac{n}{2}\right)^2; \quad (17)$$

$$x_1=y_1-\frac{2P_1}{3};\ x_2=y_2-\frac{2P_1}{3};\ x_3=y_3-\frac{2P_1}{3}. \quad (18)$$

Тоді корінь характеристичного рівняння (9) можна записати так:

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{Z_1-\frac{B_1}{4A_1}};\ k_{3,4}=\pm\sqrt{Z_2-\frac{B_1}{4A_1}}; \quad (19)$$

$$k_{5,6}=\pm\sqrt{Z_3-\frac{B_1}{4A_1}};\ k_{7,8}=\pm\sqrt{Z_4-\frac{B_1}{4A_1}}.$$

Вираз (19) можна записати як

$$k_{1-4} = \pm\alpha_1 \pm i\beta_1;\; k_{5-8} = \pm\alpha_2 \pm i\beta_2. \quad (20)$$

Для другого рівняння (7) з коефіцієнтами $A_2;\; B_2;\; C_2^*;\; G_2;\; H_2$

$$k_{1-4} = \pm\alpha_3 \pm i\beta_3;\; k_{5-8} = \pm\alpha_4 \pm i\beta_4. \quad (21)$$

Відповідно до виду корінь (20), (21) розв'язання однорідних рівнянь (7) записуємо як

$$R(y) = \sum_{i=1}^{8} C_i \Phi_i(y);\; \Lambda(y) = \sum_{i=1}^{8} C_i \Omega_i(y), \quad (22)$$

де фундаментальні функції $\Phi_i(y),\; \Omega_i(y)$ є гіперболо-тригонометричними:

$$\Phi_1 = ch\alpha_1 y \sin\beta_1 y;\; \Phi_2 = ch\alpha_1 y \cos\beta_1 y;$$
$$\Phi_3 = sh\alpha_1 y \cos\beta_1 y;\; \Phi_4 = sh\alpha_1 y \sin\beta_1 y.$$

Константи інтегрування в (22) можна одержати з розв'язання системи рівнянь для узагальнених параметрів оболонки в напрямку осі oy, якщо $y = 0$. Моментний стан оболонки визначається виразами

$$w(x,y) = \nabla^2\nabla^2 T(x,y) + \frac{1}{D}\nabla_K^2 Z(x,y);$$
$$\theta_y(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y};$$
$$M_y(x,y) = -D\left[\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right]; \quad (23)$$
$$Q_y(x,y) = -D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right].$$

Безмоментний стан визначається виразами

$$\varphi(x,y) = \nabla^2\nabla^2 Z(x,y) - Eh\nabla_K^2 T(x,y);$$
$$N_y(x,y) = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} - \int_0^y P_y dy;$$
$$S_y(x,y) = -\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x \partial y^2};$$
$$N_x(x,y) = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} - \int_0^x P_x dx; \quad (24)$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - k_x w(x,y) = \frac{1}{Eh}\left[N_x(x,y) - \mu N_y(x,y)\right];$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - k_y w(x,y) = \frac{1}{Eh}\left[N_y(x,y) - \mu N_x(x,y)\right].$$

Параметри оболонки також розкладаємо в ряди за ортогональними системами функцій:

$$w(x,y) = W(y)X_1(x);$$
$$\varphi(x,y) = P(y)X_2(x); \quad (25)$$
$$u(x,y) = U(y)X_2'(x);\; v(x,y) = V(y)X_2(x).$$

Вирази для узагальнених параметрів напружено-деформованого стану оболонки можна отримати з геометричних і фізичних рівнянь теорії пологих оболонок за допомогою процедури методу Канторовича-Власова. Відповідне рівняння моментного стану необхідно помножити на $X_1(x)$, а рівняння безмоментного стану − на $X_2(x)$ та інтегрувати в межах ширини оболонки. У цьому випадку за допомогою функцій $R(y)$ та $\Lambda(y)$ можна визначити статичні та кінематичні параметри оболонки. Для цього необхідно побудувати 7 похідних фундаментальних функцій та використати співвідношення (23)−(25). У такий спосіб ми отримали 8 рівнянь. Система 8 рівнянь за умови, коли $y = 0$, через властивості фундаментальних функцій $\Phi_i(0),\; \Omega_i(0)$ розпадається на дві системи 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{15} & A_{17} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} & A_{37} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} & A_{57} \\ A_{71} & A_{73} & A_{75} & A_{77} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta(0) \\ -Q(0)/DA_1 \\ -S(0) \\ EhV(0)/A_2 - P_3(0) \end{vmatrix}; \quad (26)$$

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{26} & A_{28} \\ A_{42} & A_{44} & A_{46} & A_{48} \\ A_{62} & A_{64} & A_{66} & A_{68} \\ A_{82} & A_{84} & A_{86} & A_{88} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_2 \\ C_4 \\ C_6 \\ C_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W(0) \\ -M(0)/DA_1 \\ N(0) + P_1(0) \\ EhU(0)/A_2 - P_2(0) \end{vmatrix}, \quad (27)$$

де $A_{ij}\; (i,j = 1,2,...,8)$ − аналітичні вирази фундаментальних функцій завдання.

Висновки

Таким чином, запропоновано розглядати вихідну модель пологої оболонки як континуальну модель в одному напрямку й дискретну в іншому. Рівняння статики пологих оболонок із прямокутним планом, які є диференціальними рівняннями в частинних похідних, за допомогою застосування методу розподілу змінних Фур'є та варіаційного методу Канторовича-Власова зводяться до звичайних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами.

Донедавна основна проблема в такій реалізації алгоритму чисельно-аналітичного методу граничних елементів була зумовлена тим, що всі аналітичні вирази методу (фундаментальних функцій, функції Гріна, векторів зовнішніх навантажень) [20] є громіздкими, а проміжні перетворення пов'язані з визначниками восьмого порядку.

Так, одна з фундаментальних функцій у (26) має вигляд

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta_{чёт}}[(H_{12}\Phi_2 - H_{14}\Phi_4)\Delta_{W_0}^{(2)} -$$
$$-(H_{12}\Phi_4 + H_{14}\Phi_2)\Delta_{W_0}^{(4)} + (H_{16}\Phi_6 - H_{18}\Phi_8)\Delta_{W_0}^{(6)} -$$
$$-(H_{16}\Phi_8 + H_{18}\Phi_6)\Delta_{W_0}^{(8)}].$$

Тут H – алгебраїчні вирази, а Δ – визначники четвертого порядку.

Але в роботі [21] нами пропонується використовувати на першому етапі метод прямого інтегрування, де, крім вихідного диференціального рівняння, розглянуто рівносильну систему рівнянь для невідомого вектора стану оболонки. У цьому випадку обчислень деяких аналітичних виразів, пов'язаних з визначниками високих порядків, можна уникнути, скориставшись формулою Якобі. У результаті обчислення визначника в довільній точці зводиться до його обчислення в точці $x = 0$, що призводить до істотного спрощення всіх аналітичних виразів чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

Технічна реалізація зазначеного вище спрощення, що дозволяє одержати аналітичні вирази фундаментальних функцій, функції Гріна й компонентів вектора навантаження, визначає напрям наших подальших досліджень щодо досліджуваної проблеми.

Література

1. Избранные труды. Т. 1. Общая теория оболочек / В. З. Власов. Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1962. 528 с.
2. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. Прикладная математика и механика. Т. 8. Вып. 2. / В. З. Власов. 1944.
3. Назаров А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Москва: Стройиздат, 1966. 304 с.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва: Наука, 1976. 512 с.
5. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек. Москва: Высшая школа, 1987. 296 с.
6. Пратусевич Я. А. О выборе подходящих функций при вариационном методе расчета пологих оболочек. Труды МИИТ. Вып. 102. Москва, 1959. С. 142–150.
7. Кохреидзе П. И. К вопросу расчета пологих оболочек при использовании балочных функций. Труды ГПИ. Вып. 175. Тбилиси, 1975. С. 56–66.
8. Кисляков С. Д. К теории пологих оболочек двоякой кривизны. Строительная механика и расчет сооружений. 1963. № 1. С. 69–77.
9. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов/ пер. с англ. А. С. Алексеева и др. Москва: Стройиздат, 1982. 447 с.
10. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва: Физматлит, 2006. 392 с.
11. Математические методы в строительной механике / Золотов А. Б., Акимов П. А., Сидоров В. Н., Мозгалева М. Л. Москва: АСВ, 2008. 336 с.
12. Нгуен Х. Д. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету оболочек: дисс. … канд. тех. наук. Москва, МГСУ, 2015.
13. Габбасов Р. Ф., Нгуен Х. Д. К расчету пологих оболочек численным методом последовательных аппроксимаций (МПА). Вестник МГСУ. 2008. № 1. С. 51–157.
14. Timergaliev S. N., Kharasova L. S. Study of the solvability of a boundary value problem for the system of nonlinear differential equations of the theory of shallow shells of the Timoshenko type. Diff. Equat., 2016. 52(5). 630–643.
15. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions / Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A. Technische Mech., 2014. 34(2). 104–113.
16. Van Dung D., Hoai B. T. Postbuckling nonlinear analysis of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners resting on elastic foundations. Acta Mechanica, 2017. 228(4). 1457–1479.
17. Nonlinear stability analysis of rotationally-restrained imperfect doubly-curved composite shallow shells / Huang S., Qiao P., Lu L., Qi Y. Thin-Walled Struct., 2019. 142. 358–368.
18. Moyeda A., Fish J. Towards practical multiscale approach for analysis of reinforced concrete structures. Computat. Mech., 2018. 62. 685–700.
19. Sklepus S.N. Creep and Damage of Shallow Shells, Int. Appl. Mech., 2018, 54(2). 180–187.
20. Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ. Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та. Инженерно-строительный журнал. № 4 (22). Санкт-Петербург, 2011. С. 33–39.

21. Krutii Yu., Surianinov M., Chaban V. The Solution of the Shells Theory Problems by the Numerical-Analytical Boundary Elements Method. Materials Science Forum. 2019. Vol. 968. P. 460–467.

References

1. (1962). Izbrannyie trudyi. Tom 1. Obschaya teoriya obolochek / V. Z. Vlasov. Moskva: Izd-vo Akademii nauk SSSR. 528 s.
2. Osnovnyie differentsialnyie uravneniya obschey teorii uprugih obolochek. Prikladnaya matematika i mehanika. T. 8. Vyip. 2 / V. Z. Vlasov. 1944.
3. Nazarov A. A. Osnovyi teorii i metodyi rascheta pologih obolochek. Moskva, 1966. 304 s.
4. Goldenveyzer A. L. Teoriya uprugih tonkih obolochek. Moskva, Nauka, 1976. 512 s.
5. Kolkunov N. V. Osnovyi rascheta uprugih obolochek. Moskva, Vyisshaya shkola, 1987. 296 s.
6. Pratusevich Ya. A. O vyibore podhodyaschih funktsiy pri variatsionnom metode rascheta pologih obolochek. Trudyi MIIT. Vyip. 102. Moskva, 1959. S. 142–150.
7. Kohreidze P. I. K voprosu rascheta pologih obolochek pri ispolzovanii balochnyih funktsiy. Trudyi GPI. Vyip. 175. Tbilisi, 1975. S.56–66.
8. Kislyakov S. D. K teorii pologih obolochek dvoyakoy kriviznyi. Stroitelnaya mehanika i raschet sooruzheniy. № 1, 1963. S. 69–77.
9. Bate K., Vilson E. Chislennyie metodyi analiza i metod konechnyih elementov / per. s angl. A. S. Alekseyeva i dr. Moskva: Stroyizdat, 1982. 447 s.
10. Golovanov A. I., Tyuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. Metod konechnyih elementov v statike i dinamike tonkostennyih konstruktsiy. Moskva: Fizmatlit, 2006. 392 s.
11. Matematicheskie metodyi v stroitelnoy mehanike / Zolotov A. B., Akimov P. A., Sidorov V. N., Mozgaleva M. L. Moskva: ASV, 2008. 336 s.
12. Nguen Hoang. Primenenie obobschennyih uravneniy metoda konechnyih raznostey k raschetu obolochek: diss. … kand. teh. nauk. Moskva: MGSU, 2015.
13. Gabbasov R. F., Nguen H. D. K raschetu pologih obolochek chislennyim metodom posledovatelnyih approksimatsiy (MPA). Vestnik MGSU № 1. Moskva, 2008. S. 51–157.
14. Timergaliev S. N., Kharasova L. S. Study of the solvability of a boundary value problem for the system of nonlinear differential equations of the theory of shallow shells of the Timoshenko type. Diff. Equat., 2016. 52(5). 630−643.
15. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions / Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A. Technische Mech., 2014. 34(2). 104–113.
16. Van Dung D., Hoai B. T. Postbuckling nonlinear analysis of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners resting on elastic foundations. Acta Mechanica, 2017. 228(4). 1457–1479.
17. Nonlinear stability analysis of rotationally-restrained imperfect doubly-curved composite shallow shells / Huang S., Qiao P., Lu L., Qi Y. Thin-Walled Struct., 2019. 142. 358–368.
18. Moyeda A., Fish J. Towards practical multiscale approach for analysis of reinforced concrete structures. Computat. Mech., 2018. 62. 685–700.
19. Sklepus S.N. Creep and Damage of Shallow Shells, Int. Appl. Mech., 2018, 54(2). 180–187.
20. Orobey V. F., Suryaninov N. G. Osnovnyie polozheniya chislenno-analiticheskogo varianta MGE. Trudyi Sankt-Peterburgskogo politehnich. un-ta. Inzhenerno-stroitelnyiy zhurnal. Sankt-Peterburg. 2011. № 4 (22). S. 33–39.
21. Krutii Yu., Surianinov M., Chaban V. The Solution of the Shells Theory Problems by the Numerical-Analytical Boundary Elements Method. Materials Science Forum. 2019. Vol. 968. P. 460–467.

For the calculation of flat shells by the numerical analytical method of boundary elements

Abstract. *The application of the numerical-analytical boundary elements method (NA BEM) to the calculation of shallow shells is considered. The method is based on the analytical construction of the fundamental system of solutions and the Green's function for the differential equation of the problem under consideration. The theory of calculation of a shallow shell proposed by V. Z. Vlasov, which for the problem under consideration leads to an eighth-order partial differential equation. The problem of bending a shallow shell is two-dimensional, and in the numerical-analytical boundary elements method, the plate and shell are considered in the form of generalized one-dimensional modules, therefore, the Fourier separation method and the Kantorovich-Vlasov variational method were applied to this equation, which made it possible to obtain ordinary differential equations of the eighth order. It is noted that until recently, the main problem in the subsequent implementation of the algorithm of the numerical-analytical boundary element method was due to the fact that all analytical expressions of the method (fundamental functions, Green's functions, vectors of external loads) are very cumbersome, and intermediate transformations are associated with determinants of the eighth order. It is proposed to use the direct integration method at the first stage, when, along with the original differential equation, an equivalent system of equations for the unknown shell state vector is considered. In this case, the calculations of some analytic expressions associated with determinants of higher orders can be avoided by using the Jacobi formula. As a result, the calculation of the determinant at an arbitrary point is reduced to its calculation at a zero value of the argument, which leads to a significant simplification of all*

intermediate transformations and analytical expressions of the numerical-analytical boundary elements method.

Keywords: *shallow shell, boundary elements method, Fourier method, Kantorovich-Vlasov method, fundamental functions.*

Suryaninov Mykola[1]**,** professor, Doct. of Technical Science, Head of Structural Mechanics Department, sng@ogasa.org.ua, tel. +38 050-333-37-54,

Boiko Oleksii[1], Ph.D., Assistant, Metal Structures Department, tel. +38 050-516-60-00, boikoolv@gmail.com,

[1]Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture , 4, Didrikhsona str., Odessa, 65029, Ukraine.